『経済学のための数学』中間試験　解答 [*1]

note:各問題の点数を小門番号の横に記す。合計４０点。

1.(計 15 点)

1.(1)(3 点) 効用関数

$$u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

を考える。問題文に沿って、ラグランジュの未定乗数法を用いて最適消費計画 (需要関数)$x_1^*(p_1, p_2, I), x_2^*(p_1, p_2, I)$ を求める。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2) \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1^{-\frac{1}{\sigma}}\left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} + \lambda(-p_1) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2^{-\frac{1}{\sigma}}\left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} + \lambda(-p_2) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{5}$$

(3),(4) より、この最適化問題の一階条件は、

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{p_2}{p_1} \tag{6}$$

ゆえに、(6) を (5) に代入することで、最適消費計画 $x_1^*(p_1, p_2, I), x_2^*(p_1, p_2, I)$ を得る。

$$x_1^*(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_1^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}} \tag{7}$$

$$x_2^*(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_2^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}} \tag{8}$$

1.(2)(3 点) 次にラグランジュの未定乗数 $\lambda^* = \lambda^*(p_1, p_2, I)$ を求める。上で求めた最適消費計画 $x_1^*(p_1, p_2, I), x_2^*(p_1, p_2, I)$ を (3), もしくは (4) に代入すると得られる。(計算が少し面倒なので、$(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}) = X$ などと置くと、解きやすい。)

$$\lambda^*(p_1, p_2, I) = (p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{9}$$

1.(3)(3 点) 間接効用関数を求めるには (1) で求めた最適消費計画 $x_1^*(p_1, p_2, I), x_2^*(p_1, p_2, I)$ を効用関数に代入すればよい。

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, I) &= \left(\left(\frac{Ip_1^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{Ip_2^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= I(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{\sigma-1}} \end{aligned} \tag{10}$$

[*1] TA:Yu Onohara (Office:337 in Akamon Building)
mail:yu.onohara@gmail.com

1.(4)(3 点) $\frac{\partial V}{\partial I}$ を求めるには素直に偏微分しても構わないが間接効用関数の性質より、I で偏微分するとラグランジュ乗数と一致するので、1.(2) の答えから瞬時に導ける。

$$\frac{\partial V}{\partial I}(p_1, p_2, I) = (p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{11}$$

CHECK!：Lagrange の未定乗数は所得の限界効用に等しい。『経済学とファイナンスのための数学』p147,4.2 参照

1.(5)(3 点) 解答の方針：1)$(\bar{p_1}, \bar{p_2}) = (5, 3)$ が解となることを証明する。2) 最小化問題を地道に解く (計算ミスがなければ、綺麗に値が出てきます)。
※似た問題として、宿題 1 の 3.(2) を参照せよ。ただし、この試験では証明の必要はない。
1) 効用関数の最大化問題

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ s.t. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

と間接効用関数の最小化問題

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, I) = \left(\left(\frac{I p_1^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{I p_2^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ s.t. \quad p_1 \bar{x_1} + p_2 \bar{x_2} = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

との双対性により、$(p_1, p_2) = (5, 3)$ が解になりそうだと guess する。ただし問に答えるためには $(p_1, p_2) = (5, 3)$ が解であることを証明する必要がある。Step.1

$$\bar{x_1} = x_1^*(5, 3, 1), \bar{x_2} = x_2^*(5, 3, 1) \tag{14}$$

より、$(p_1, p_2) = (5, 3)$ が最小化問題の制約条件を満たしているのがわかる。($\because$ $\bar{x_1}, \bar{x_2}$ は効用最大化問題の解であるため、$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1$ を満たしている。)
Step.2 最小化問題の制約条件 $p_1 \bar{x_1} + p_2 \bar{x_2} = 1$ を満たす非負で任意の (p_1, p_2) について、効用最適化問題の解を $(x_1^*(5, 3, 1), x_2^*(5, 3, 1))$ とすると、すべての x_1, x_2 について、

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, I) &= u(x_1^*(p_1, p_2, I), x_2^*(p_1, p_2, I)) \\ &\geq u(\bar{x_1}, \bar{x_2}) \\ &= V(5, 3) \end{aligned}$$

が成立する。ゆえに、(5,3) が最小化問題の解となることがわかる。

2) 双対性を用いなくても、そのまま最小化問題を解いても解を導ける。ただし、計算ミスに注意すること。(解答省略)

2. (計 15 点)[*2]

包絡線

$$(*)\quad F(\alpha) = \max_x f(x, \alpha)$$

について考える。

(1)(3 点)

$$f(x, \alpha) = -x^2 + \alpha x$$

は α を所与とすると、x についての上に凸な二次関数となるため、最大化の一階の十分条件は、必要条件ともなり

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} = \alpha - 2x = 0.$$

これより式 (*) 右辺の最大化問題の解は

$$x^*(\alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

となる。

(2)(4 点)

(1) の答えを (*) に代入すると、

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= -x^*(\alpha)^2 + \alpha x^*(\alpha) \\ &= -(\frac{\alpha}{2})^2 + \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{4}\alpha^2. \end{aligned}$$

(3)(4 点)

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^*(\alpha), \alpha) = F'(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha.$$

(4)(4 点)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) = x$$

であることに注意すると、

[*2] TA:Kenji Tsukada (Office:330 in Akamon Building)
mail:matsui2010summer@gmail.com

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)|_{x=x^*(\alpha)} = x^*(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha.$$

この結果、すなわち、包絡線の構成関数がパラメータ α の微小な増減に応じて変形し、最適解 $x^*(\alpha)$ が変化するとき、これを考慮した包絡線上の値の微小な変化の合計（全微分）は α の変化が値を変化させる直接的な効果（偏微分）と一致する（あるいは、$x^*(\alpha)$ を通した間接的な効果が 0 になるとも）、というのが包絡線定理の主張することである。一般に全微分より偏微分のほうが扱いやすく、(4) においては $x^*(\alpha)$ を目的関数に代入して $F(\alpha)$ を得るという操作をせずに答えが求められていることに注意せよ。

3.(10 点)

(採点基準：満点 10 点よりミスごとに減点、方針点として凸関数の定義が書いてあれば 3 点。)

任意の実数 α, β および、$t \in [0,1]$ を用意する。$g(\cdot)$ の定義より、

$$g(t\alpha + (1-t)\beta) = \max_{x\in\mathbb{R}}\{(t\alpha + (1-t)\beta)x - f(x)\}$$

右辺の最大化問題の解を $x^*(t\alpha + (1+t)\beta)$ として、これを $\bar{x}$ と表し、式変形を繰り返すと

$$\begin{aligned}
g(t\alpha + (1-t)\beta) &= (t\alpha + (1-t)\beta)\bar{x} - f(\bar{x}) \\
&= (t\alpha + (1-t)\beta)\bar{x} - (t + (1-t))f(\bar{x}) \\
&= t(\alpha\bar{x} - f(\bar{x})) + (1-t)(\beta\bar{x} - f(\bar{x})) \\
&\le t\max_{x\in\mathbb{R}}\{\alpha x - f(x)\} + (1-t)\max_{x\in\mathbb{R}}\{\beta x - f(x)\} \\
&= tg(\alpha) + (1-t)g(\beta)
\end{aligned}$$

を得る。これで $g(\cdot)$ は凸関数の定義を満たすことが示された。

別解

関数 g の構成要素である関数 f の微分可能性が仮定されていないため、厳密には g の二階微分を用いて凸性を判定することはできない。（先に示したように、定義を用いる方法ではこのような仮定がなくても凸性は証明できる。）

ただし仮に f の二階微分可能性を仮定すると次のように g の凸性を証明できる。(採点基準:包絡線定理により $g'(\alpha) = x^*(\cdot)$ を示す。最大化問題の解の二階の条件に言及する。両方が記述されていてはじめて加点の対象となる。)

任意の α について

$$g(\alpha) = \max_{x\in\mathbb{R}} \alpha x - f(x)$$

の右辺の最大化問題について、f が二階微分可能だとすると、その解 $x^*(\alpha)$ は最適解の一階の必要条件

$$f'(x^*(\alpha)) = \alpha$$

および

二階の必要条件

$$-f''(x^*(\alpha)) \leq 0$$

を満たす。

このx$^*(\alpha)$ を用いると $g(\alpha)$ の導関数は、包絡線定理により

$$g'(\alpha) = \frac{\partial\{\alpha x - f(x)\}}{\partial\alpha}|_{x=x^*(\alpha)} = x^*(\alpha)$$

となる。

したがって $g(\alpha)$ の二階微分は $g''(\alpha) = x^{*\prime}(\alpha)$ となる。ここで $x^*(\alpha)$ は最適化の必要条件を満たすため、f の導関数を h とおいて $(f'(\cdot) = h(\cdot))$、解の近傍でその逆関数の存在を認めると $x^*(\alpha) = h^{-1}(\alpha)$ とかける。ここで逆関数の微分に注意すると

$$x^{*\prime}(\alpha) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\alpha))} = \frac{1}{f''(x^*(\alpha))}$$

となる。ここで二階の条件より、

$$g''(\alpha) = x^{*\prime}(\alpha) = \frac{1}{f''(x^*(\alpha))} \geq 0$$

が示せる。すなわち g は凸である。