1 分離定理のいろいろ

定理 1.1 $K \subset \mathbb{R}^n$ を閉凸集合，$a \notin K$ とする．このとき $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p'a < \alpha$$
$$p'x \geq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明 教科書の定理 3.35 を見てください． □

定理 1.2 $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．$K \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ ならば，$p \in \mathbb{R}^n_+$, $p \neq 0$ が存在して

$$p'x \leq 0 \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明 教科書の定理 3.37 と 119 ページの「(1) $\Rightarrow$ (2)」の前半部分の議論から証明できます． □

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $K \neq \emptyset$ が凸錐 (convex cone) であるとは，

(a) $x, y \in K$ ならば $x + y \in K$

(b) $x \in K, \lambda \geq 0$ ならば $\lambda x \in K$

をみたすことをいいます．定義から $0 \in K$ になることに注意してください．凸錐 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$K^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in K \text{ に対して } p'x \geq 0\}$$

と定義します．K^* を K の双対錐 (dual cone) といいます．K^* は閉凸錐になります．また，K^* の双対錐 $(K^*)^*$ を K^{**} と書くことにします．

定理 1.3 $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．

(1) $K \subset K^{**}$.

(2) K が閉凸錐ならば，$K^{**} = K$.

証明 (1) 定義をよくにらめば出てくる．

(2) K を閉凸錐とする．$K^{**} \subset K$ を示せばよい．$a \notin K$ とする．K は閉凸集合なので，定理 1.1 より $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p'a < \alpha \tag{1.1}$$
$$p'x \geq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して}) \tag{1.2}$$

が成り立つ．ある $x \in K$ に対して $p'x < 0$ となったとすると，K が凸錐であることから任意の $\lambda > 0$ に対して $\lambda x \in K$ なので，$p'(\lambda x)$ いくらでも小さくなってしまい，(1.2) に矛盾する．したがって，すべての $x \in K$ に対して $p'x \geq 0$ が成り立つ．つまり $p \in K^*$.

一方，$0 \in K$ なので，(1.2) より $\alpha \leq 0$ でないといけない．したがって (1.1) より $p'a < 0$ となる．よって $a \notin K^{**}$ がいえた． □

定理 1.4 (Minkowski-Farkas の補題) A を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow b'y \geq 0$ が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned} K &= \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0\} \\ L &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid y'A \geq 0\} \end{aligned}$$

とする．(1) $\Leftrightarrow b \in K$ であり，また，

$$\begin{aligned} L^* &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in L \text{ に対して } y'z \geq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } y'A \geq 0 \Rightarrow y'z \geq 0\} \end{aligned}$$

なので，(2) $\Leftrightarrow b \in L^*$ である．したがって，$K = L^*$ が証明したいことである．K は閉凸錐なので定理 1.3 より，$K^* = L$ を示せばよい ($L^* = K^{**} = K$ となる)．実際，

$$\begin{aligned} y \in K^* &\iff \forall z \in K:\ y'z \geq 0 \\ &\iff \forall x \geq 0:\ y'Ax \geq 0 \\ &\iff y'A \geq 0 \iff y \in L^* \end{aligned}$$

である． □

定理 1.5 (Stiemke の補題) A を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax = 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'A = 0$ が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned} L &= \{A'y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathbb{R}^m\} \\ L^\perp &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in L \text{ に対して } z'x = 0\} \end{aligned}$$

とする．ここで

$$L^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = 0\}$$

であることに注意すると，(1), (2) はそれぞれ

$$(1')\ L^\perp \cap \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset, \qquad (2')\ L \cap \mathbb{R}^n_{+} = \{0\}$$

と同値である．(1′) $\Leftrightarrow$ (2′) が証明したいことである．

(1′) $\Rightarrow$ (2′): (2′) が成り立たないとすると，$y'A > 0$ なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する．どんな $z \in \mathbb{R}^n_{++}$ についても この y に対しては $y'Az > 0$ なので，$Az = 0$ とはなりえない，すなわち $z \in L^\perp$ とはなりえない．つまり $L^\perp \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ である．

$(2') \Rightarrow (1')$: $(1')$ が成り立たないとする．$L^\perp$ は凸集合なので，定理 1.2 より，ある $p \in \mathbb{R}^n_+$, $p \neq 0$ が存在して，すべての $z \in L^\perp$ に対して

$$p'z \leq 0$$

が成り立つ．ここで，$p'z < 0$ となる $z \in L^\perp$ が存在すると，$-z \in L^\perp$ なので $p'(-z) > 0$ となってしまい矛盾．したがって，すべての $z \in L^\perp$ に対して $p'z = 0$ である．これは $p \in (L^\perp)^\perp$ を意味し，$(L^\perp)^\perp \subset L$ なので，すなわち $p \in L \cap \mathbb{R}^n_+$ である．$p \neq 0$ だったので，$p \in L \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \{0\}$ がいえた． □

注意 1.1 $(L^\perp)^\perp \subset L$ の証明．$\{a_1, \dots, a_k\}$, $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ をそれぞれ L, $L^\perp$ の正規直交基底とします．(これらは $\mathbb{R}^n$ の基底をなします．) $p \in (L^\perp)^\perp$ に対して $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j b_j$ と表すと，$\beta_j = p'b_j = 0$, $j = 1, \dots, \ell$ なので $p \in L$ となります．

ちなみに，定義よりただちに $L \subset (L^\perp)^\perp$ がしたがうので，結局 $L = (L^\perp)^\perp$ が成り立ちます．

(2011/6/21)