3 凸解析のちょっと進んだ話題

3.1 凸関数のエピグラフに関する分離定理

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ に対して，f のグラフの上側の集合

$$\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid w \geq f(x)\}$$

を f のエピグラフ (epigraph) といい $\operatorname{epi} f$ で表します．f が凸関数であるための必要十分条件は，$\operatorname{epi} f$ が ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ での) 凸集合であることです．$\operatorname{epi} f$ が ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ での) 閉集合であるような凸関数を閉凸関数といいます．(証明はしませんが) $|f| < \infty$ であるような凸関数は必ず閉凸関数です．

凸関数のエピグラフに関する分離定理を述べます．

定理 3.1 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を閉凸関数とし，$(\bar{x}, \bar{w}) \notin \operatorname{epi} f$ とする．このとき，$p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p \cdot \bar{x} - \bar{w} > \alpha \geq p \cdot x - w \quad (\text{すべての } (x, w) \in \operatorname{epi} f \text{ に対して}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．

3.2 共役関数

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ (ただし $f \not\equiv \infty$) に対して，

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p \cdot x - f(x)$$

で定義される関数 $f^*\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を f の共役関数 (conjugate function) といいます．f^* は凸関数で，また，$\operatorname{epi} f$ は ($\mathbb{R}^{n+1}$ での) 閉集合です (演習 1 問 15)．f^* の共役関数 $(f^*)^*$ を f^{**} と書くことにします．

定理 3.2 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ (ただし $f \not\equiv \infty$) が閉凸関数ならば $f^{**} = f$.

証明 (i) 定義から $f^{**} \leq f$ が成り立ちます．

(ii) $f^{**}(\bar{x}) \leq \bar{w} < f(\bar{x})$ なる $(\bar{x}, \bar{w})$ が存在するとします．$(\bar{x}, \bar{w}) \notin \operatorname{epi} f$ で，仮定より f は閉凸関数なので，定理 3.1 よりある $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bar{p} \cdot \bar{x} - \bar{w} > \alpha \geq \bar{p} \cdot x - w \quad (\text{すべての } (x, w) \in \operatorname{epi} f \text{ に対して})$$

が成り立ちます．とくに，$f(x) < \infty$ なるすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\bar{p} \cdot \bar{x} - \bar{w} > \alpha \geq \bar{p} \cdot x - f(x)$$

です．したがって，

$$\bar{p} \cdot \bar{x} - \bar{w} > f^*(\bar{p})$$

となりますが，これより

$$\bar{p} \cdot \bar{x} - f^*(\bar{p}) > \bar{w} \geq f^{**}(\bar{x})$$

となり，これは f^{**} の定義に矛盾します． □

3.3 劣微分

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ に対して，

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{p} \cdot (x - \bar{x}) \quad (\text{すべての } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して}) \tag{3.2}$$

が成り立つとき，$\bar{p}$ を f の $\bar{x}$ における劣勾配 (subgradient) といいます．また，f の $\bar{x}$ における劣勾配すべてからなる集合を f の $\bar{x}$ における劣微分 (subdifferential) といい，$\partial f(\bar{x})$ と書きます．

定理 3.3 $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ (ただし $f \not\equiv \infty$) を閉凸関数とする．このとき，任意の $\bar{x}, \bar{p} \in \mathbb{R}^n$ に対して以下の条件はすべて同値である．

(1) $\bar{p} \in \partial f(\bar{x})$.

(2) $f(\bar{x}) + f^*(\bar{p}) \leq \bar{p} \cdot \bar{x}$.

(3) $f(\bar{x}) + f^*(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{x}$.

(4) $\bar{x} \in \partial f^*(\bar{p})$.

3.4 利潤関数の性質

利潤関数に関して議論しますが，同様の性質は支出関数や費用関数についても成り立ちます．

ある企業の生産可能性集合が $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Y \neq \emptyset$ で与えられているとします．利潤関数 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ は

$$\pi(p) = \sup_{y \in Y} p \cdot y$$

で定義されます[1]．供給対応を

$$y(p) = \arg\max_{y \in Y} p \cdot y$$

とします．

[1] 負の価格が気に入らなければ，Y が自由処分性を満たすとして，$\mathbb{R}^n_+$ で定義された π を $p \notin \mathbb{R}^n_+$ に対して $\pi(p) = \infty$ とすることで $\mathbb{R}^n$ 全体に拡張します．

定理 3.4 (Hotelling の補題の劣微分バージョン) Y が閉凸集合ならば $\partial\pi(p) = y(p)$.

定理 3.5 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ (ただし $\pi \not\equiv \infty$) を 1 次同次な閉凸関数とする．このとき，

$$Y^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } p \cdot y \leq \pi(p)\}$$

とすると，すべての $p \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\pi(p) = \sup_{y \in Y^*} p \cdot y$$

が成り立つ．

(2013/7/3)