2 凸集合の位相的性質

2.1 位相のいろは

閉集合・開集合はそれぞれ言葉で「境界を含む集合」「境界を含まない集合」と説明されますが，これらを数学的にきちんと定義してみましょう．そもそもの「集合 (A とおきましょう) の境界」ですが，「集合 A の中からも外からも限りなく近づける点の集合」と定義したい．まず「限りなく近づく」という概念は点列の収束として定式化します．

定義 2.1 $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ が $x^* \in \mathbb{R}^n$ に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある K が存在してすべての $k \geq K$ に対して

$$\|x - x^*\| \leq \varepsilon$$

が成り立つことをいう．このとき，$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$ とか $x^k \to x^*$ とかと書く．

「点 x^* に集合 A の中から限りなく近づける」とは「$x^k \to x^*$ となるような，A に含まれる点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する」ことであると定式化します．集合 A の中から限りなく近づける点の集合を A の閉包 (closure) といいます．A の境界 (boundary) は，A の中からも限りなく近づける (A の閉包に含まれる) し，A の外から限りなく近づける (A の補集合の閉包に含まれる) ような点の集合と定義します．また，A の外から限りなく近づくことのできない点の集合を A の内部 (interior) といいます．

定義 2.2 $A \subset \mathbb{R}^n$ の閉包 $\mathrm{cl}\, A$，境界 ∂A，内部 $\mathrm{int}\, A$ をそれぞれ

$$\mathrm{cl}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ある点列 } \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A \text{ が存在して } x^k \to x\}$$
$$\partial A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$$
$$\mathrm{int}\, A = A \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$$

と定義する．

境界をすべて含む集合を閉集合 (closed set)，境界をまったく含まない集合を開集合 (open set) と定義します．

定義 2.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合であるとは $\partial A \subset A$ であることをいう．
$A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは $\partial A \cap A = \emptyset$ であることをいう．

閉包の性質を述べます．

命題 2.1

(1) $\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset$.

(2) $A \subset \mathrm{cl}\, A$.

(3) (i) $A \subset B$ ならば $\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$.

(ii) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$.

(4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$.

証明　(1) 定義から明らかです．

(2) 定義から明らかです ($x \in A$ に対して $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ を $x^1 = x^2 = \cdots = x$ という点列とすればよい).

(3) (i) 定義から明らかです．(ii) $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset A \cup B$ ならば A, B の少なくとも一方は $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ の無限個の要素を含みます．

(4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) \subset \mathrm{cl}\, A$ を示せばよい．$x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A)$ とします．定義より $x^k \to x$ となる $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{cl}\, A$ が存在します．さらに，各 k に対して，$y^{k,i} \to x^k$ となる $\{y^{k,i}\}_{i=1}^\infty \subset A$ が存在します．各 $m = 1, 2, \dots$ に対して，$\|x^k - x\| \leq 1/(2m)$ となる k が存在するのでそれを $k(m)$ とおきます．また，$\|y^{k(m),i} - x^{k(m)}\| \leq 1/(2m)$ となる i が存在するのでそれを $i(m)$ とおきます．そして，点列 $\{y^m\}_{m=1}^\infty \subset A$ を $y^m = y^{k(m),i(m)}$ で定義します．この点列が x に収束することを示したい．$\varepsilon > 0$ を任意にとり，M を $M \geq 1/\varepsilon$ を満たすものとします．すると，どんな $m \geq M$ に対しても

$$
\begin{aligned}
\|y^m - x\| \leq \|y^m - x^{k(m)}\| + \|x^{k(m)} - x\| &= \|y^{k(m),i(m)} - x^{k(m)}\| + \|x^{k(m)} - x\| \\
&\leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = 1/m \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立ちます． □

上の命題 2.1 の (3) で，(i) は (ii) の特殊ケースです．

ところで，A の閉包は A に境界を加えたもの，A の内部は A から境界をのぞいたもの，と見ることもできます．

命題 2.2　$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{cl}\, A = A \cup \partial A$.

(2) $\mathrm{int}\, A = A \setminus \partial A$.

(3) $\mathrm{int}\, A = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

証明　(1) $A \subset \mathrm{cl}\, A$ と $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ より，

$$
\begin{aligned}
A \cup \partial A &= A \cup \bigl(\mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\bigr) \\
&= (A \cup \mathrm{cl}\, A) \cap \bigl(A \cup \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\bigr) = \mathrm{cl}\, A \cap \mathbb{R}^n = \mathrm{cl}\, A
\end{aligned}
$$

となります．

(2) $A \subset \mathrm{cl}\, A$ より，

$$
\begin{aligned}
A \setminus \partial A &= A \setminus \bigl(\mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\bigr) \\
&= (A \setminus \mathrm{cl}\, A) \cup \bigl(A \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\bigr) = \emptyset \cup \mathrm{int}\, A = \mathrm{int}\, A
\end{aligned}
$$

となります．

(3) $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ より，

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A) &= \big(A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)\big) \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A) \\ &= \big(A \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\big) \cup \big((\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)\big) = \mathrm{int}\, A \cup \emptyset = \mathrm{int}\, A\end{aligned}$$

となります． □

命題 2.3　$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，次が成り立つ．

(1) A が閉集合 $\iff$ $\mathrm{cl}\, A = A$.

(2) A が開集合 $\iff$ $\mathrm{int}\, A = A$.

(3) A が閉集合 $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合.

証明　(1) 命題 2.2(1) より $\partial A \subset A \iff \partial A \cup A = A \iff \mathrm{cl}\, A = A$.

(2) 命題 2.2(2) より $A \cap \partial A = \emptyset \iff A \setminus \partial A = A \iff \mathrm{int}\, A = A$.

(3) 境界の定義より $\partial A = \partial \mathbb{R}^n \setminus A$ なので $\partial A \subset A \iff \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset \iff \partial(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$. □

命題 2.4　$A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{cl}\, A$ は閉集合である．

(2) $A \subset B$ かつ B が閉集合ならば，$\mathrm{cl}\, A \subset B$.

(3) $\mathrm{int}\, A$ は開集合である．

(4) $A \supset B$ かつ B が開集合ならば，$\mathrm{int}\, A \supset B$.

証明　(1) 命題 2.1(4) より $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$ なので，命題 2.3(1) より $\mathrm{cl}\, A$ は閉集合です．

(3) 命題 2.2(3) より $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\, A = \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ ですが，(1) より $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ は閉集合．したがって命題 2.3(2) より $\mathrm{int}\, A$ は開集合です． □

命題 2.5

(1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は閉集合である．

(2) 任意の閉集合の族の交わりは閉集合である．

(3) 有限個の閉集合の結びは閉集合である．

証明　命題 2.3(1) の条件 $\mathrm{cl}\, A = A$ が成り立つことを確かめます．

(1) 命題 2.1 の (1) と (2) より．

(2) I を任意の添え字集合として，$\{A_i\}_{i \in I}$ を閉集合の族とします．命題 2.1(3)–(i) より，どんな $j \in I$ に対しても $\mathrm{cl}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \subset \mathrm{cl}\, A_j$ なので，$\mathrm{cl}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i \in I} \mathrm{cl}\, A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

(3) 命題 2.1(3)–(ii) より． □

命題 2.6　$A \subset \mathbb{R}^n$ について，次の 2 つの条件は同値である．

(1) A は閉集合である．

(2) $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$, $x^k \to x$ ならば $x \in A$.

証明　(1) ⇒ (2): ある点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ と $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$x^k \to x$ かつ $x \notin A$ とする．$x \in \operatorname{cl} A$ だが $x \notin A$ である x が存在するということなので，$\operatorname{cl} A \neq A$．つまり A は閉集合でない．

(2) ⇒ (1): $x \in \operatorname{cl} A$ とする．$x^k \to x$ となる点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ が存在するということであるが，(2) が成り立つならば $x \in A$ となる． □

命題 2.7　$A \subset \mathbb{R}^n$ について，次の 2 つの条件は同値である．

(1) A は開集合である．

(2) すべての $x \in A$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A$ となる．

命題 2.8　$\inf\{\|x - a\| \mid x \in A\} = 0 \iff a \in \operatorname{cl} A$.

2.2　$\mathbb{R}$ の性質

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ について，何を性質 (公理) として要請して何を定理として証明するかはいくつか方法がありますが，ここでは以下を公理として採用することにします (本当は，背後にさらに四則演算や順序に関する公理があります)．これは「実数とは無限小数で書ける数のことです」という説明を数学的に定式化したものと見ることができます．

公理 2.1 (アルキメデスの原理)　任意の正の実数 a, b に対して $a < kb$ となるような自然数 k が存在する．

公理 2.2 (区間縮小法)　有界閉区間の列 $I_k = [a_k, b_k]$ が $I_{k+1} \supset I_k$ かつ $\lim_{k\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ を満たすならば，$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ は 1 点からなる．

命題 2.9　$\mathbb{R}$ 内の有界数列は収束部分列をもつ．

命題 2.10　$\mathbb{R}^n$ 内の有界点列は収束部分列をもつ．

2.3　凸集合の位相的性質

命題 2.11　$C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．$x \in \operatorname{int} C$, $y \in \operatorname{cl} C$ ならば任意の $\lambda \in [0, 1)$ に対して $(1-\lambda)x + \lambda y \in \operatorname{int} C$.

証明　$x \in \operatorname{int} C$, $y \in \operatorname{cl} C$ とします．$\lambda \in [0, 1)$ を任意に固定します．示したいのは，ある $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在して任意の $u \in B_1(0)$ に対して $(1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}u \in C$ となることです ($B_1(0)$ は 0 を中心とする半径 1 の開球)．

$x \in \operatorname{int} C$ より，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u \in B_1(0)$ に対して $x + \varepsilon_0 u \in C$ となります．この ε_0 に対して $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0(1-\lambda)/(1+\lambda)$ と定めます ($\lambda \in [0, 1)$ より $\bar{\varepsilon} > 0$ です)．$y \in \operatorname{cl} C$ なので，この $\bar{\varepsilon}$ に対してある $u_0 \in B_1(0)$ が存在して $y - \bar{\varepsilon}u_0 \in C$ が成り立ちます．

任意に $u \in B_1(0)$ を固定します．$u' = [\lambda/(1+\lambda)]u_0 + [1/(1+\lambda)]u$ とおくと，$B_1(0)$ の凸性より $u' \in B_1(0)$ です．調べたい $(1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}u$ を

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}u &= (1-\lambda)x + \lambda(y - \bar{\varepsilon}u_0) + \lambda\bar{\varepsilon}u_0 + \bar{\varepsilon}u \\ &= (1-\lambda)\left(x + \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{1-\lambda}u_0 + \frac{\bar{\varepsilon}}{1-\lambda}u\right) + \lambda(y - \bar{\varepsilon}u_0) \\ &= (1-\lambda)(x + \varepsilon_0 u') + \lambda(y - \bar{\varepsilon}u_0)\end{aligned}$$

と書きかえます ($\bar{\varepsilon}$ の定義から $\bar{\varepsilon}\lambda/(1-\lambda) = \varepsilon_0\lambda/(1+\lambda)$, $\bar{\varepsilon}/(1-\lambda) = \varepsilon_0/(1+\lambda)$ となることに注意してください)．ここで，ε_0 のとり方から $x + \varepsilon_0 u' \in C$ なので，C の凸性より $(1-\lambda)(x + \varepsilon_0 u') + \lambda(y - \bar{\varepsilon}u_0) \in C$ となります． □

補題 2.12　$C \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合ならば $\mathrm{cl}\, C$ と $\mathrm{int}\, C$ も凸集合.

命題 2.13　$C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．$\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) \neq \emptyset$ ならば $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$.
とくに，$\mathrm{cl}\, C = \mathbb{R}^N$ ならば $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$.

命題 2.14　$C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．(i) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) = \mathrm{int}\, C$.
(ii) $\partial(\mathrm{cl}\, C) = \partial C$.

証明　(i) $\Leftrightarrow$ (ii) なので，(i) のみ示します.
まず，$\mathrm{cl}\, C \supset C$ なので $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) \supset \mathrm{int}\, C$ です.
$\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) \subset \mathrm{int}\, C$ を示したい．$\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) = \emptyset$ なら自明なので，$\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C) \neq \emptyset$ とします．すると，命題 2.13 より $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$ です．$z \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C)$ とします．示したいのは $z \in \mathrm{int}\, C$ です．任意に $x \in \mathrm{int}\, C$ $(\neq \emptyset)$ をとります．$x = z$ ならば自明に $z \in \mathrm{int}\, C$ なので $x \neq z$ とします．$\varepsilon > 0$ に対して

$$y = z - \varepsilon(x - z)$$

とおき，$y \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C)$ (したがって $y \in \mathrm{cl}\, C$) となるように $\varepsilon > 0$ を十分小さくとります．すると，z は $x \in \mathrm{int}\, C$, $y \in \mathrm{cl}\, C$ の凸結合として

$$z = \left\{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right\}x + \frac{1}{1+\varepsilon}y$$

と書けるので，命題 2.11 より $z \in \mathrm{int}\, C$ となります． □

(2013/6/12)