

1 分離定理のいろいろ

1.1 分離定理

定理 1.1 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を閉凸集合, $a \notin K$ とする. このとき $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(1) \quad p \cdot a < \alpha$$

$$(2) \quad p \cdot x \geq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.

証明 $\delta = \inf\{\|x - a\| \mid x \in K\}$ とおく. $a \notin \text{cl} K (= K)$ より $\delta > 0$ である. δ の定義から, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - a\| = \delta$ となるような K 内の点列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在する. 収束の定義から, ある番号 N が存在してすべての $k \geq N$ に対して $\|x^k - a\| < 2\delta$ となる. したがって $\{x^k\}_{k=N}^{\infty}$ は有界点列であるので, 部分列 (煩雑さを避けるためこれを改めて $\{x^k\}_{k=N}^{\infty}$ と書くことにする) と $x^* \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ となる. ここで, 仮定より K は閉集合なので $x^* \in K$ となる. また, 三角不等式 $\|x^k - a\| \leq \|x^k - x^*\| + \|x^* - a\|$, $\|x^* - a\| \leq \|x^* - x^k\| + \|x^k - a\|$ より

$$\|x^k - a\| - \|x^k - x^*\| \leq \|x^* - a\| \leq \|x^k - a\| + \|x^k - x^*\|$$

となり, $k \rightarrow \infty$ とすると $\|x^k - a\| \rightarrow \delta$, $\|x^k - x^*\| \rightarrow 0$ なので, $\|x^* - a\| = \delta$ である. 以上より, $x^* \in K$, $\delta = \|x^* - a\| = \min\{\|x - a\| \mid x \in K\}$ である.

ここで

$$p = x^* - a, \quad \alpha = p \cdot x^*$$

とおく. このとき条件 (1), (2) はそれぞれ

$$(1') \quad (x^* - a) \cdot (a - x^*) < 0$$

$$(2') \quad (x^* - a) \cdot (x - x^*) \geq 0 \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

と書ける. これらが成り立つことを確かめたい.

まず, $(x^* - a) \cdot (a - x^*) = -\|x^* - a\|^2 = -\delta^2 < 0$ なので (1') が成り立つ.

次に (2') が成り立つことを示す. 任意に $x \in K$ を固定する. K は凸集合なので, $0 < t \leq 1$ なる任意の t に対して $(1-t)x^* + x \in K$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \|x^* - a\|^2 &\leq \|(1-t)x^* + x - a\|^2 \\ &= \|(x^* - a) + t(x - x^*)\|^2 \\ &= \|x^* - a\|^2 + 2t(x^* - a) \cdot (x - x^*) + t^2\|x - x^*\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. これを整理して両辺を $t \neq 0$ で割ると

$$0 \leq 2(x^* - a) \cdot (x - x^*) + t\|x - x^*\|^2$$

を得る. $t \rightarrow 0$ とすると $t\|x - x^*\|^2 \rightarrow 0$ なので, $(x^* - a) \cdot (x - x^*) \geq 0$ が成り立つ. \square

事実 1.1 $K \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合ならば, $\partial K = \partial(\text{cl } K)$.

証明 「凸集合の位相的性質」を見てください. \square

この事実はまったく自明でなく, K が凸集合でなければ成り立ちません. たとえば, $n = 1$, $K = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (0 以上 1 以下の有理数全体) とすると, $\text{cl } K = [0, 1]$ なので $\text{int}(\text{cl } K) = (0, 1)$, $\partial(\text{cl } K) = \{0, 1\}$ ですが, 一方, $\text{int } K = \emptyset$, $\partial K = [0, 1]$ となります.

定理 1.2 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合, $a \in \partial K$ とする. このとき $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \geq p \cdot a \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.

証明 $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合, $a \in \partial K$ とする. 事実 1.1 より $a \in \partial(\text{cl } K)$ である. したがって, $a^k \notin \text{cl } K$, $a^k \rightarrow a$ となるような点列 $\{a^k\}_{k=1}^\infty$ をとることができる. K が凸集合であることから $\text{cl } K$ も凸集合で (「凸集合の位相的性質」を見てください), かつ閉集合なので, それぞれの a^k に対して定理 1.1 が使える. すなわち, 各 k について $p^k \neq 0$ が存在して, すべての $x \in K$ に対して

$$p^k \cdot x > p^k \cdot a^k$$

が成り立つ. ここで $q^k = p^k / \|p^k\|$ とおくと, $\|q^k\| = 1$ で, また, すべての $x \in K$ に対して

$$q^k \cdot x > q^k \cdot a^k \tag{1.1}$$

が成り立つ. 点列 $\{q^k\}_{k=1}^\infty$ は有界なので収束部分列をもつ (これを改めて $\{q^k\}_{k=1}^\infty$ とおくことにする). 収束先を p とすると, $\|p\| = 1$ なので $p \neq 0$ である. ここで, 任意の $x \in K$ に対して, (1.1) 式で $k \rightarrow \infty$ とすることで

$$p \cdot x \geq p \cdot a$$

を得る. \square

集合 K に対して $a \notin \text{int } K$ ならば $a \notin \text{cl } K$ または $a \in \partial K$ なので, 定理 1.1 と定理 1.2 から次が言えます.

系 1.3 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合とする. $a \notin \text{int } K$ ならば $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \geq p \cdot a \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.

$K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ に対して,

$$\delta^*(p|K) = \sup_{x \in K} p \cdot x$$

で定義される関数 $\delta^*(\cdot|K): \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ を K の支持関数 (support function) といいます.

定理 1.4 $K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ を閉凸集合とする. このとき

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } p \cdot x \leq \delta^*(p|K)\}$$

が成り立つ.

証明 (i) 左辺 \subset 右辺: 支持関数の定義から明らか.

(ii) 左辺 \supset 右辺: $a \notin K$ とする. K は閉凸集合なので, 定理 1.1 よりある $\bar{p} \neq 0$ と α が存在して

$$\bar{p} \cdot a > \alpha \geq \bar{p} \cdot x \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ. したがって $\bar{p} \cdot a > \alpha \geq \sup_{x \in K} \bar{p} \cdot x = \delta^*(\bar{p}|K)$ が成り立つので $a \notin$ 右辺である. □

支持関数 $\delta^*(\cdot|K)$ に対して, 関数 $\delta^{**}(\cdot|K)$ を

$$\delta^{**}(x|K) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} p \cdot x - \delta^*(p|K)$$

で定義すると, この定理と $\delta^*(\cdot|K)$ が 1 次同次であることから, 閉凸集合 K に対して $\delta^{**}(\cdot|K) = \delta(\cdot|K)$ が従います (演習 1 の問 14, 15 参照). $K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ が錐 (cone) であるとは, $x \in K, \lambda \geq 0$ ならば $\lambda x \in K$ が成り立つことをいいます.

補題 1.5 $K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ を錐, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 次同次関数とする. このとき

$$\sup_{x \in K} f(x) = \begin{cases} 0 & (\sup_{x \in K} f(x) \leq 0 \text{ ならば}) \\ \infty & (\sup_{x \in K} f(x) > 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

$$\inf_{x \in K} f(x) = \begin{cases} 0 & (\inf_{x \in K} f(x) \geq 0 \text{ ならば}) \\ -\infty & (\inf_{x \in K} f(x) < 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

が成り立つ.

定理 1.6 $K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ が閉凸集合ならば $\delta^{**}(\cdot|K) = \delta(\cdot|K)$ が成り立つ.

証明 $\bar{p} \notin K$ ならば, 定理 1.4 より, ある \bar{p} が存在して $\bar{p} \cdot x - \delta^*(\bar{p}|K) > 0$ が成り立つ. $p \cdot x - \delta^*(p|K)$ は p に関して 1 次同次なので, 補題 1.5 より $\delta^{**}(\bar{p}|K) = \infty$ となる. 一方, $\bar{p} \in K$ ならば $\delta^{**}(\bar{p}|K) \leq 0$ なので, 補題 1.5 より $\delta^{**}(\bar{p}|K) = 0$. □

1.2 非負係数の超平面による分離

定理 1.7 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合とする. $K \cap \mathbb{R}_{++}^n = \emptyset$ ならば, $p \geq 0$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq 0 \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.

定理 1.8 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を閉凸集合とする. $K \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$ ならば, $p \gg 0$ と $\alpha \geq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.

1.3 線形方程式・不等式と分離定理

以下, \mathbb{R}^N の要素は列ベクトル (縦ベクトル) であるとします. 行列 A に対して A の転置を A' で表すことにします.

\mathbb{R}^n の部分集合 $K \neq \emptyset$ が凸錐 (convex cone) であるとは,

$$(a) \quad x, y \in K \text{ ならば } x + y \in K$$

$$(b) \quad x \in K, \lambda \geq 0 \text{ ならば } \lambda x \in K$$

をみたすことをいいます. 定義から $0 \in K$ になることに注意してください. 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ に対して

$$K^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in K \text{ に対して } p'x \geq 0\}$$

$$K^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in K \text{ に対して } p'x \leq 0\}$$

と定義します ($K^\circ = -K^*$ です). K^* を K の双対錐 (dual cone), K° を K の極錐 (polar cone) といいます¹. K^* , K° は閉凸錐になります. また, K^* の双対錐 $(K^*)^*$ を K^{**} , K° の極錐 $(K^\circ)^\circ$ を $K^{\circ\circ}$ と書くことにします. 定義から $K \subset K^{**} = K^{\circ\circ}$ です.

補題 1.5 で見たとおり, 錐の支持関数の値は 0 か ∞ のどちらかなので, 分離定理の支持関数による表現 (定理 1.4) より次が成り立ちます.

定理 1.9 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ が閉凸錐ならば $K^{\circ\circ} = K$.

証明 K が錐であることから

$$\delta^*(p|K) = \sup_{x \in K} p'x = \begin{cases} 0 & (p \in K^\circ \text{ ならば}) \\ \infty & (p \notin K^\circ \text{ ならば}) \end{cases}$$

¹ K° を双対錐ということもあります.

である。したがって、

$$\begin{aligned} K^{\circ\circ} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in K^\circ \text{ に対して } p'x \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } p'x \leq \delta^*(p|K)\} \end{aligned}$$

であるが、 K は閉凸集合なので定理 1.4 よりこれは K に等しい。 □

$K^{**} = K^{\circ\circ}$ なので、この定理より、閉凸錐 K に対して $K^{**} = K$ が成り立ちます。

事実 1.2 $m \times n$ 行列 A に対して、 $\{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$ は閉集合である。

定理 1.10 (Minkowski-Farkas の補題) A を $m \times n$ 行列、 $b \in \mathbb{R}^m$ とする。次の 2 つの条件は同値である。

- (1) $Ax = b, x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。
- (2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow b'y \geq 0$ が成り立つ。

証明 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0\}$$

とおく。(1) $\Leftrightarrow b \in K$ である。また、

$$\begin{aligned} y \in K^* &\iff \text{すべての } z \in K \text{ に対して } y'z \geq 0 \\ &\iff \text{すべての } x \geq 0 \text{ に対して } y'Ax \geq 0 \\ &\iff y'A \geq 0 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} K^{**} &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in K^* \text{ に対して } y'z \geq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } y'A \geq 0 \Rightarrow y'z \geq 0\} \end{aligned}$$

と書ける。したがって、(2) $\Leftrightarrow b \in K^{**}$ である。いま、事実 1.2 より凸錐 K は閉集合なので、定理 1.9 より $K = K^{**}$ である。したがって $b \in K \Leftrightarrow b \in K^{**}$ が成り立つ。 □

定理 1.11 (Fan の定理) A を $m \times n$ 行列、 $b \in \mathbb{R}^m$ とする。次の 2 つの条件は同値である。

- (1) $Ax \leq b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。
- (2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y \geq 0, y'A = 0 \Rightarrow b'y \geq 0$ が成り立つ。

証明 (1) \Rightarrow (2): (1) を仮定する。すると、 $y \geq 0, y'A = 0$ ならば、 $b'y \geq y'Ax = 0$ が成り立つ。

(2) \Rightarrow (1): (2) を仮定する。すると、

$$\begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y \geq 0$$

なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということになるので, Minkowski-Farkas の補題 (定理 1.10) の「(1) の否定 \Rightarrow (2) の否定」より, ある $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})' \in \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して

$$z' \begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} z < 0$$

が成り立つ. これらは

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \geq -z_{n+1}b, \quad -z_{n+1} < 0$$

と書きかえられるので, $x = (-z_1/z_{n+1}, \dots, -z_n/z_{n+1})$ とおくことで

$$Ax \leq b$$

を得る. □

定理 1.12 (Gordan の定理) A を $m \times n$ 行列とする. 次の 2 つの条件は同値である.

- (1) $Ax \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
- (2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y \geq 0, y'A = 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ.

証明 (2) \Rightarrow (1): (2) を仮定する. すると,

$$\begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \geq 0$$

なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということになるので, Minkowski-Farkas の補題 (定理 1.10) の「(1) の否定 \Rightarrow (2) の否定」より, ある $x \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{pmatrix} x' & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} < 0$$

が成り立つ. これらは

$$Ax \geq -\alpha \mathbf{1}, \quad \alpha < 0$$

と書きかえられるので,

$$Ax \gg 0$$

が成り立つ. □

定理 1.13 \mathbb{R}^n の線形部分空間 L に対して

$$L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in L \text{ に対して } y'z = 0\}$$

とおく (L の直交補空間という). 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $L \cap \mathbb{R}_{++}^n \neq \emptyset$.

(2) $L^\perp \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$.

証明 L の基底を $\{b^1, \dots, b^k\}$ とし, $n \times k$ 行列 B を $B = (b^1 \dots b^k)$ とおくと,

$$L = \{Bx \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^k\}$$

なので,

(1) \iff 「 $Bx \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^k$ が存在する」

である. また,

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in L \text{ に対して } y'z = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in \mathbb{R}^k \text{ に対して } y'Bx = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y'B = 0\} \end{aligned}$$

なので,

(2) \iff 「 $y \geq 0, y'B = 0 \Rightarrow y = 0$ 」

である. したがって, 定理 1.12 より (1) \Leftrightarrow (2) が従う. □

線形部分空間 L に対して $(L^\perp)^\perp = L$ なので, 次がただちに成り立ちます.

定理 1.14 \mathbb{R}^n の線形部分空間 M とその直交補空間 M^\perp に対して, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $M^\perp \cap \mathbb{R}_{++}^n \neq \emptyset$.

(2) $M \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$.

注意 1.3.1 $(L^\perp)^\perp \subset L$ の証明. $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_\ell\}$ をそれぞれ L, L^\perp の正規直交基底とします. (これらは \mathbb{R}^n の基底をなします.) $p \in (L^\perp)^\perp$ に対して $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j b_j$ と表すと, $\beta_j = p'b_j = 0, j = 1, \dots, \ell$ なので $p \in L$ となります.

一方の $L \subset (L^\perp)^\perp$ は定義からすぐに確かめられます.

定理 1.15 (Stiemke の補題) A を $m \times n$ 行列とする. 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $Ax = 0, x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'A = 0$ が成り立つ.

証明 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\begin{aligned} L &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \\ M &= \{A'y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathbb{R}^m\} \end{aligned}$$

とおくと, (1), (2) はそれぞれ

(1') $L \cap \mathbb{R}_{++}^n \neq \emptyset, \quad (2') M \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$

と同値である。いま,

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in M \text{ に対して } z'x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } y'Ax = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = L \end{aligned}$$

なので, 定理 1.14 より $(1') \Leftrightarrow (2')$ である.

□

(2013/6/19)