# 1 分離定理のいろいろ

## 1.1 分離定理

**定理 1.1** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を閉凸集合，$a \notin K$ とする．このとき $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

(1) $p \cdot a > \alpha$

(2) $p \cdot x \leq \alpha$ (すべての $x \in K$ に対して)

が成り立つ．

**証明** $\delta = \inf\{\|x - a\| \mid x \in K\}$ とおく．$a \notin \mathrm{cl}\, K$ $(= K)$ より $\delta > 0$ である．$\delta$ の定義から，$\lim_{k\to\infty}\|x^k - a\| = \delta$ となるような $K$ 内の点列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在する．収束の定義から，ある番号 $N$ が存在してすべての $k \geq N$ に対して $\|x^k - a\| < 2\delta$ となる．したがって $\{x^k\}_{k=N}^{\infty}$ は有界点列であるので，部分列 (煩雑さを避けるためこれを改めて $\{x^k\}_{k=N}^{\infty}$ と書くことにする) と $x^* \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$ となる．ここで，仮定より $K$ は閉集合なので $x^* \in K$ となる．また，三角不等式 $\|x^k - a\| \leq \|x^k - x^*\| + \|x^* - a\|$, $\|x^* - a\| \leq \|x^* - x^k\| + \|x^k - a\|$ より

$$\|x^k - a\| - \|x^k - x^*\| \leq \|x^* - a\| \leq \|x^k - a\| + \|x^k - x^*\|$$

となり，$k \to \infty$ とすると $\|x^k - a\| \to \delta$, $\|x^k - x^*\| \to 0$ なので，$\|x^* - a\| = \delta$ である．以上より，$x^* \in K$, $\delta = \|x^* - a\| = \min\{\|x - a\| \mid x \in K\}$ である．

ここで

$$p = a - x^*, \qquad \alpha = p \cdot x^*$$

とおく．このとき条件 (1), (2) はそれぞれ

(1′) $(a - x^*) \cdot (a - x^*) > 0$

(2′) $(a - x^*) \cdot (x - x^*) \leq 0$ (すべての $x \in K$ に対して)

と書ける．これらが成り立つことを確かめたい．

まず，$(a - x^*) \cdot (a - x^*) = \|x^* - a\|^2 = \delta^2 > 0$ なので (1′) が成り立つ．

次に (2′) が成り立つことを示す．任意に $x \in K$ を固定する．$K$ は凸集合なので，$0 < t \leq 1$ なる任意の $t$ に対して $(1-t)x^* + tx \in K$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\|a - x^*\|^2 &\leq \|a - \{(1-t)x^* + tx\}\|^2 \\ &= \|(a - x^*) - t(x - x^*)\|^2 \\ &= \|a - x^*\|^2 - 2t(a - x^*) \cdot (x - x^*) + t^2\|x - x^*\|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．これを整理して両辺を $t \neq 0$ で割ると

$$0 \leq -2(a-x^*)\cdot(x-x^*) + t\|x-x^*\|^2$$

を得る．$t \to 0$ とすると $t\|x-x^*\|^2 \to 0$ なので，$0 \leq -2(a-x^*)\cdot(x-x^*)$ すなわち $(a-x^*)\cdot(x-x^*) \leq 0$ が成り立つ． □

**事実 1.1**　$K \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合ならば，$\partial K = \partial(\mathrm{cl}\, K)$.

証明　「凸集合の位相的性質」を見てください． □

この事実はまったく自明でなく，$K$ が凸集合でなければ成り立ちません．たとえば，$n = 1$, $K = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ (0 以上 1 以下の有理数全体) とすると，$\mathrm{cl}\, K = [0,1]$ なので $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, K) = (0,1)$, $\partial(\mathrm{cl}\, K) = \{0,1\}$ ですが，一方，$\mathrm{int}\, K = \emptyset$, $\partial K = [0,1]$ となります．

**定理 1.2**　$K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合，$a \in \partial K$ とする．このとき $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq p \cdot a \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明　$K \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$a \in \partial K$ とする．事実 1.1 より $a \in \partial(\mathrm{cl}\, K)$ である．したがって，$a^k \notin \mathrm{cl}\, K$, $a^k \to a$ となるような点列 $\{a^k\}_{k=1}^{\infty}$ をとることができる．$K$ が凸集合であることから $\mathrm{cl}\, K$ も凸集合で (「凸集合の位相的性質」を見てください)，かつ閉集合なので，それぞれの $a^k$ に対して定理 1.1 が使える．すなわち，各 $k$ について $p^k \neq 0$ が存在して，すべての $x \in K$ に対して

$$p^k \cdot x < p^k \cdot a^k$$

が成り立つ．ここで $q^k = p^k/\|p^k\|$ とおくと，$\|q^k\| = 1$ で，また，すべての $x \in K$ に対して

$$q^k \cdot x < q^k \cdot a^k \tag{1.1}$$

が成り立つ．点列 $\{q^k\}_{k=1}^{\infty}$ は有界なので収束部分列をもつ (これを改めて $\{q^k\}_{k=1}^{\infty}$ とおくことにする)．収束先を $p$ とすると，$\|p\| = 1$ なので $p \neq 0$ である．ここで，任意の $x \in K$ に対して，(1.1) 式で $k \to \infty$ とすることで

$$p \cdot x \leq p \cdot a$$

を得る． □

集合 $K$ に対して $a \notin K$ ならば $a \notin \mathrm{cl}\, K$ または $a \in \partial K$ なので，定理 1.1 と定理 1.2 から次が言えます．

**系 1.3**　$K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合とする．$a \notin K$ ならば $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq p \cdot a \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

## 1.2 分離定理と支持関数

$K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ に対して,

$$\delta^*(p|K) = \sup_{x \in K} p \cdot x$$

で定義される関数 $\delta^*(\cdot|K)\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を $K$ の支持関数 (support function) といいます.

**定理 1.4** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を閉凸集合とする.このとき

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } p \cdot x \leq \delta^*(p|K)\}$$

が成り立つ.

証明 (i) 左辺 $\subset$ 右辺:支持関数の定義から明らか.

(ii) 左辺 $\supset$ 右辺:$a \notin K$ とする.$K$ は閉凸集合なので,定理 1.1 よりある $\bar{p} \neq 0$ と $\alpha$ が存在して

$$\bar{p} \cdot a > \alpha \geq \bar{p} \cdot x \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ.したがって $\bar{p} \cdot a > \alpha \geq \sup_{x \in K} \bar{p} \cdot x = \delta^*(\bar{p}|K)$ が成り立つので $a \notin$ 右辺 である. □

支持関数 $\delta^*(\cdot|K)$ に対して,関数 $\delta^{**}(\cdot|K)$ を

$$\delta^{**}(x|K) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} p \cdot x - \delta^*(p|K)$$

で定義します.すると,定理 1.4 と $\delta^*(\cdot|K)$ が 1 次同次 (かつ $\delta^*(0|K) = 0$) であることから,以下に見るように,閉凸集合 $K$ に対して $\delta^{**}(\cdot|K) = \delta(\cdot|K)$ が従います (演習 1 の問 15, 16 参照).

$K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ が錐 (cone) であるとは,$x \in K$, $\lambda \geq 0$ ならば $\lambda x \in K$ が成り立つことをいいます.

**補題 1.5** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を錐,$f\colon K \to [-\infty, \infty]$ を $f(0) = 0$ なる 1 次同次関数とする.このとき

$$\sup_{x \in K} f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{すべての } x \in K \text{ に対して } f(x) \leq 0 \text{ ならば}) \\ \infty & (\text{ある } x \in K \text{ が存在して } f(x) > 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

$$\inf_{x \in K} f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{すべての } x \in K \text{ に対して } f(x) \geq 0 \text{ ならば}) \\ -\infty & (\text{ある } x \in K \text{ が存在して } f(x) < 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

が成り立つ.

**定理 1.6** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ が閉凸集合ならば $\delta^{**}(\cdot|K) = \delta(\cdot|K)$ が成り立つ.

証明 まず,$p \cdot x - \delta^*(p|K)$ が $p$ に関して 1 次同次で,$0 \cdot x - \delta^*(0|K) = 0$ が成り立つことに注意する.$x \notin K$ ならば,定理 1.4 より,ある $\bar{p}$ が存在して $\bar{p} \cdot x - \delta^*(\bar{p}|K) > 0$ が成り立つ.よって,補題 1.5 より $\delta^{**}(\bar{p}|K) = \infty$ となる.一方,$x \in K$ ならば,すべての $p \in \mathbb{R}^n$ に対して $p \cdot x - \delta^*(p|K) \leq 0$ なので,補題 1.5 より $\delta^{**}(\bar{p}|K) = 0$. □

## 1.3 非負係数の超平面による分離

$p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $p_i \geq 0$ のとき $p \geq 0$ と，また，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $p_i > 0$ のとき $p \gg 0$ とそれぞれ書くことにします．

**補題 1.7** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ が $K - \mathbb{R}^n_{++} \subset K$ を満たすとする．$p \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p \cdot x \leq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つならば，$p \geq 0$ である．

**定理 1.8** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を凸集合とする．$K \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ ならば，$p \geq 0, p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq 0 \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

**定理 1.9** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ を閉凸集合とする．$K \cap \mathbb{R}^n_{+} = \{0\}$ ならば，$p \gg 0$ と $\alpha \geq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq \alpha \quad (\text{すべての } x \in K \text{ に対して})$$

が成り立つ．

**証明** $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ とおき (この集合 $\Delta$ を $n-1$ 次元単体という)，$K - \Delta$ を考える．次の事実を使う． □

**事実 1.2** $A \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合，$B \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とすると，$A - B$ は閉集合である．

## 1.4 線形方程式・不等式と分離定理

以下，$\mathbb{R}^N$ の要素は列ベクトル (縦ベクトル) であるとします．行列 $A$ に対して $A$ の転置を $A'$ で表すことにします．

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $K \neq \emptyset$ が凸錐 (convex cone) であるとは，

(a) $x, y \in K$ ならば $x + y \in K$

(b) $x \in K, \lambda \geq 0$ ならば $\lambda x \in K$

をみたすことをいいます．定義から $0 \in K$ になることに注意してください．集合 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ に対して

$$K^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in K \text{ に対して } p'x \geq 0\}$$
$$K^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in K \text{ に対して } p'x \leq 0\}$$

と定義します ($K^\circ = -K^*$ です)．$K^*$ を $K$ の双対錐 (dual cone)，$K^\circ$ を $K$ の極錐 (polar cone) といいます [1]．$K^*$, $K^\circ$ は閉凸錐になります．また，$K^*$ の双対錐 $(K^*)^*$ を $K^{**}$, $K^\circ$ の極錐 $(K^\circ)^\circ$ を $K^{\circ\circ}$ と書くことにします．定義から $K \subset K^{**} = K^{\circ\circ}$ です．

補題 1.5 で見たとおり，錐の支持関数の値は 0 か $\infty$ のどちらかなので，分離定理の支持関数による表現 (定理 1.4) より次が成り立ちます．

**定理 1.10** $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ が閉凸錐ならば $K^{\circ\circ} = K$.

証明 $K$ が錐であることから

$$\delta^*(p|K) = \sup_{x \in K} p'x = \begin{cases} 0 & (p \in K^\circ \text{ ならば}) \\ \infty & (p \notin K^\circ \text{ ならば}) \end{cases}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} K^{\circ\circ} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in K^\circ \text{ に対して } p'x \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } p'x \leq \delta^*(p|K)\} \end{aligned}$$

であるが，$K$ は閉凸集合なので定理 1.4 よりこれは $K$ に等しい． □

$K^{**} = K^{\circ\circ}$ なので，この定理より，閉凸錐 $K$ に対して $K^{**} = K$ が成り立ちます．

**事実 1.3** $m \times n$ 行列 $A$ に対して，$\{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n_+\}$ は閉集合である．

証明 教科書の定理 3.41 を見てください． □

**定理 1.11 (Minkowski-Farkas の補題)** $A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow b'y \geq 0$ が成り立つ．

証明 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0\}$$

とおく．(1) $\Leftrightarrow b \in K$ である．また，

$$\begin{aligned} y \in K^* &\iff \text{すべての } z \in K \text{ に対して } y'z \geq 0 \\ &\iff \text{すべての } x \geq 0 \text{ に対して } y'Ax \geq 0 \\ &\iff y'A \geq 0 \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} K^{**} &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in K^* \text{ に対して } y'z \geq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \text{すべての } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } y'A \geq 0 \Rightarrow y'z \geq 0\} \end{aligned}$$

と書ける．したがって，(2) $\Leftrightarrow b \in K^{**}$ である．いま，事実 1.3 より凸錐 $K$ は閉集合なので，定理 1.10 より $K = K^{**}$ である．したがって $b \in K \Leftrightarrow b \in K^{**}$ が成り立つ． □

[1] $K^\circ$ を双対錐ということもあります．

Minkowski-Farkas の補題からいろいろな定理を導くことができます．

**定理 1.12 (Fan の定理)**　$A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax \leq b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y \geq 0,\ y'A = 0 \Rightarrow b'y \geq 0$ が成り立つ．

証明　(1) ⇒ (2): (1) を仮定する．すると，$y \geq 0, y'A = 0$ ならば，$b'y \geq y'Ax = 0$ が成り立つ．

(2) ⇒ (1): (2) を仮定する．すると，

$$\begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y \geq 0$$

なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということになるので，Minkowski-Farkas の補題 (定理 1.11) の「(1) の否定 ⇒ (2) の否定」より，ある $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})' \in \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して

$$z' \begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} z < 0$$

が成り立つ．これらは

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \geq -z_{n+1} b, \quad -z_{n+1} < 0$$

と書きかえられるので，$x = (-z_1/z_{n+1}, \dots, -z_n/z_{n+1})$ とおくことで

$$Ax \leq b$$

を得る．□

**定理 1.13 (Gordan の定理)**　$A$ を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y \geq 0,\ y'A = 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ．

証明　(2) ⇒ (1): (2) を仮定する．すると，

$$\begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \geq 0$$

なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということになるので，Minkowski-Farkas の補題 (定理 1.11) の「(1) の否定 ⇒ (2) の否定」より，ある $x \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{pmatrix} x' & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} < 0$$

が成り立つ．これらは

$$Ax \geq -\alpha \mathbf{1}, \quad \alpha < 0$$

と書きかえられるので，

$$Ax \gg 0$$

が成り立つ． □

**定理 1.14** $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $L$ に対して

$$L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in L \text{ に対して } y'z = 0\}$$

とおく ($L$ の直交補空間という)．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $L \cap \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset$.

(2) $L^\perp \cap \mathbb{R}^n_{+} = \{0\}$.

**証明** $L$ の基底を $\{b^1, \ldots, b^k\}$ とし，$n \times k$ 行列 $B$ を $B = (b^1 \cdots b^m)$ とおくと，

$$L = \{Bx \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^k\}$$

なので，

$$(1) \iff \text{「} Bx \gg 0 \text{ なる } x \in \mathbb{R}^k \text{ が存在する」}$$

である．また，

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in L \text{ に対して } y'z = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } x \in \mathbb{R}^k \text{ に対して } y'Bx = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y'B = 0\} \end{aligned}$$

なので，

$$(2) \iff \text{「} y \geq 0,\ y'B = 0 \Rightarrow y = 0 \text{」}$$

である．したがって，定理 1.13 より (1) ⇔ (2) が従う． □

線形部分空間 $L$ に対して $(L^\perp)^\perp = L$ なので，次がただちに成り立ちます．

**定理 1.15** $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $M$ とその直交補空間 $M^\perp$ に対して，次の 2 つの条件は同値である．

(1) $M^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset$.

(2) $M \cap \mathbb{R}^n_{+} = \{0\}$.

**注意 1.4.1** $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$ の証明．$\{a_1, \dots, a_k\}$, $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ をそれぞれ $L$, $L^{\perp}$ の正規直交基底とします．(これらは $\mathbb{R}^n$ の基底をなします．) $p \in (L^{\perp})^{\perp}$ に対して $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j b_j$ と表すと，$\beta_j = p' b_j = 0$, $j = 1, \dots, \ell$ なので $p \in L$ となります．

一方の $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$ は定義からすぐに確かめられます．

**定理 1.16 (Stiemke の補題)** $A$ を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $Ax = 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'A = 0$ が成り立つ．

証明 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$
\begin{aligned}
L &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \\
M &= \{A'y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathbb{R}^m\}
\end{aligned}
$$

とおくと，(1), (2) はそれぞれ

$$
(1') \ L \cap \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset, \qquad (2') \ M \cap \mathbb{R}^n_{+} = \{0\}
$$

と同値である．いま，

$$
\begin{aligned}
M^{\perp} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } z \in M \text{ に対して } z'x = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } y'Ax = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = L
\end{aligned}
$$

なので，定理 1.15 より $(1') \Leftrightarrow (2')$ である． □

定理 1.9 (と事実 1.3) から証明することもできます．

(2014/6/20)