経済学のための数学
尾山 大輔
2024 年 5 月 2 日

宿題 1

締切：5 月 9 日

1. 効用関数

$$u(x_1, x_2) = \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \alpha_2 x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

を考える．ただし，$\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$．また，$\sigma = 1$ に対しては

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

と定める．

(1) 第 1 財，第 2 財の限界効用 $\mathrm{MU}_1(x_1, x_2)$, $\mathrm{MU}_2(x_1, x_2)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 第 2 財で測った第 1 財の限界代替率 $\mathrm{MRS}_{12}(x_1, x_2)$ $(= \mathrm{MU}_1(x_1, x_2)/\mathrm{MU}_2(x_1, x_2))$ を求めよ．

(3) 効用最大化問題を定式化せよ．

(4) 第 1 財，第 2 財に対する (通常の) 需要関数 $x_1^*(p_1, p_2, I)$, $x_2^*(p_1, p_2, I)$ をそれぞれ求めよ．

(5) 間接効用関数 $v(p_1, p_2, I)$ を求めよ．

(6) 支出最小化問題を定式化せよ．

(7) 第 1 財，第 2 財に対する補償需要関数 $h_1(p_1, p_2, t)$, $h_2(p_1, p_2, t)$ をそれぞれ求めよ．

(8) 支出関数 $e(p_1, p_2, t)$ を求めよ．

(9) 最適消費の比 $\dfrac{x_1^*(p_1, p_2, I)}{x_2^*(p_1, p_2, I)}$ を価格比 $\dfrac{p_1}{p_2}$ の関数と見たときの弾力性 $\dfrac{d(x_1^*/x_2^*)}{d(p_1/p_2)}\Big/\dfrac{x_1^*/x_2^*}{p_1/p_2}$ を第 1 財・第 2 財の代替の弾力性という．(4) で求めた需要関数に対して代替の弾力性を計算せよ．

2. 2×2 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

が半負定値であるための必要十分条件を求めたい．

(1) A が半負定値であるとは

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leq 0 \qquad (\text{すべての } (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ に対して})$$

となることであるが，$z_1 + z_2 = 1$ と基準化しても同じことなので，けっきょく

$$\begin{pmatrix} z \\ 1-z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1-z \end{pmatrix} \leq 0 \qquad (\text{すべての } z \in \mathbb{R} \text{ に対して}) \tag{$*$}$$

という条件を考えればよい．$(*)$ の不等式の左辺を計算すると

$$Pz^2 - 2Qz + R$$

と書ける．P, Q, R をそれぞれ a, b, c で表しなさい．

(2) いま考えたい条件は

$$Pz^2 - 2Qz + R \leq 0 \qquad (\text{すべての } z \in \mathbb{R} \text{ に対して}) \tag{$**$}$$

である．そのための必要十分条件を $P = 0$ と $P \neq 0$ で場合分けして求めよ．

(3) 上の条件を a, b, c を使って書きなさい．

3. 関数

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \qquad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++})$$

を考える (ただし，$\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$)．

(1) f の (x_1, x_2) における Hesse 行列

$$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

を計算せよ (対称行列になることを確認せよ)．

(2) f が凹関数となるための α_1, α_2 の条件を求めよ．
(すべての (x_1, x_2) において $D^2 f(x_1, x_2)$ が半負定値となるための条件を考える．)

4. 2 つの投入財 (投入財 1, 2) を用いて 1 つの産出財を生産する企業の利潤関数が

$$\pi(p, w_1, w_2) = \frac{p^2}{8w_1^{\frac{1}{2}}w_2^{\frac{1}{2}}}$$

で与えられているとする．ただし，p は産出財の価格，w_i は投入財 i の価格である．このとき，この企業の生産関数 $f(x_1, x_2)$ (凹関数であると仮定する) を求めよ．