1. 比較静学

尾山 大輔

経済学のための数学

2024 年 4 月 18 日，25 日，5 月 2 日

パラメタ付きの等式制約付き最適化問題

$$(*) \qquad \max_{x} \ f(x,\alpha) \quad \text{s.t.} \ g(x,\alpha) = 0$$

$(x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M)$

- 最大値が存在するとして，それを $v(\alpha)$ と書くことにする．(最適価値関数)
- α が $\alpha = \bar{\alpha}$ から少し変化したら，最適解や v はどう変化するのか？

  $\cdots$ 比較静学

- Lagrange の未定乗数法：

$$L(x, \lambda, \alpha) = f(x, \alpha) + \lambda g(x, \alpha)$$

- 最適性の 1 階条件：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \lambda, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \alpha) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, \alpha) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda, \alpha) = g(x, \alpha) = 0$$

- 最適解が $x^*(\alpha) = (x_1^*(\alpha), \ldots, x_N^*(\alpha))$，対応する Lagrange 乗数が $\lambda^*(\alpha)$ と書けるとし，それぞれ微分可能であるとする.

  (適切な仮定の下で成り立つ $\cdots$ 「陰関数定理」)

- $v(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha) = L(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)$

- 合成関数の微分公式 (Chain Rule) より，各 $j = 1, \ldots, M$ について，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} L(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}(\alpha) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha_j}(\alpha) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \qquad \text{(1 階条件より)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha) + \lambda^*(\alpha) \frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha)
\end{aligned}
$$

$\cdots$ 包絡線公式

包絡線公式

命題 1.1

最適化問題 ($*$) の解を $x^*(\alpha)$，対応する Lagrange 乗数を $\lambda^*(\alpha)$ とすると

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha) + \lambda^*(\alpha)\frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha)$$

$(j = 1, \ldots, M)$

例：効用最大化問題

$$\max_{x} \quad u(x)$$
$$\text{s.t.} \quad p \cdot x = I$$

$(x = (x_1, \ldots, x_N),\ p = (p_1, \ldots, p_N))$

- $f(x, p, I) = u(x)$ 　 ($p,\ I$ に依存せず)
  $g(x, p, I) = I - p \cdot x$
- 最適解：$x^*(p, I)$
  対応する Lagrange 乗数：$\lambda^*(p, I)$
- 間接効用関数：$v(p, I)$ $(= u(x^*(p, I)))$
- 包絡線公式で，$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial I} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial p_i} = -x_i$, $\frac{\partial g}{\partial I} = 1$ なので，

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, I) = -\lambda^*(p, I) x_i^*(p, I)$$
$$\frac{\partial v}{\partial I}(p, I) = \lambda^*(p, I)$$

命題 1.2

- Roy の等式

$$x_i^*(p, I) = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_i}(p, I)}{\dfrac{\partial v}{\partial I}(p, I)}$$

- Houthakker の等式

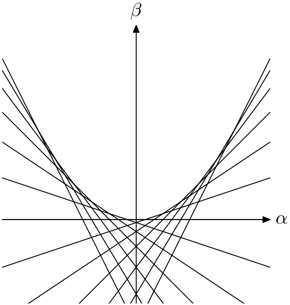
$$\frac{x_i^*(p, I)}{x_j^*(p, I)} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_i}(p, I)}{\dfrac{\partial v}{\partial p_j}(p, I)}$$

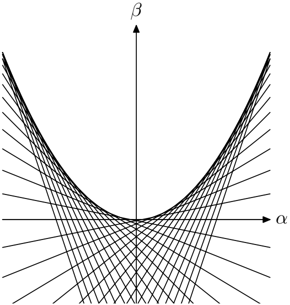
“包絡線”

- 例： $f(x, \alpha) = -x^2 + \alpha x$
- x をパラメタと見て，α-β 平面上の曲線 (直線)

$$\ell_x : \ \beta = x\alpha - x^2$$

  を考える (傾き x).
- x をいろいろ動かしてみると：





- 直線群の包絡線：

$$\beta = v(\alpha) = \max_x f(x, \alpha)$$

(解を $x^*(\alpha)$ とする)

- 包絡線 $\beta = v(\alpha)$ は各 α において直線 $\ell_{x^*(\alpha)}$ と接している：

$$v'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*(\alpha), \alpha) = x^*(\alpha)$$

別の導出方法

$$v(\alpha) = \max_{x} \quad f(x,\alpha)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x,\alpha) = 0$$

(公式の導出に，解関数の微分可能性は実は不要)

- $\alpha = \bar{\alpha}$ のときの最適解を $\bar{x}$ とおいて固定する.

  $(g(\bar{x},\bar{\alpha}) = 0$ かつ $v(\bar{\alpha}) = f(\bar{x},\bar{\alpha}))$

- $\alpha = \bar{\alpha}$ は次の最小化問題の解である：

$$(**) \qquad \min_{\alpha} \quad v(\alpha) - f(\bar{x},\alpha)$$
$$\text{s.t.} \quad g(\bar{x},\alpha) = 0$$

  - $\alpha = \bar{\alpha}$ は制約条件を満たす：$g(\bar{x},\bar{\alpha}) = 0$
  - $g(\bar{x},\alpha) = 0$ ならば，$v(\alpha) - f(\bar{x},\alpha) \geq 0 = v(\bar{\alpha}) - f(\bar{x},\bar{\alpha})$

- Lagrange 関数：

$$L(\alpha, \mu) = v(\alpha) - f(\bar{x}, \alpha) - \mu g(\bar{x}, \alpha)$$

- 1 階条件：最適解 $\alpha = \bar{\alpha}$ は，ある $\bar{\mu}$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{x}, \bar{\alpha}) - \bar{\mu}\frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0 \qquad (j = 1, \dots, M)$$

  を満たす.

  $\cdots$ 包絡線公式

- 使っている仮定：$v(\alpha)$ の微分可能性

  ($+$ $f(x, \alpha)$, $g(x, \alpha)$ の α に関する微分可能性 $+$ Lagrange 法のための条件)

最適価値関数の微分可能性

- 最適価値関数は適切な条件なしでは微分可能とは限らない.
- 例

$$v(\alpha) = \max_x f(x,\alpha) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \alpha x - \frac{1}{4} \qquad (-1 < \alpha < 1)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha) = -(x+1)(x+\alpha)(x-1)$
- $v(\alpha) = \max\{f(-1,\alpha), f(1,\alpha)\} = \frac{2}{3}|\alpha|$

  $\cdots\ \alpha = 0$ で微分不可能
- $\alpha = 0$ では，最適解は複数 $(x = -1, 1)$.

包絡線 "定理"

- 包絡線定理は
  - v が微分可能となる条件
  - $\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}$ が満たす式 (包絡線公式)

  を与えるもの.
- 多くの場合, v の微分可能性の仮定の下で後者を求めるのは容易.
  前者が包絡線「定理」の実質的な内容.
- いろいろな十分条件の与え方が知られている.

包絡線定理の一例 (Oyama and Takenawa, 2018)

$$
\begin{aligned}
v(\alpha) = \max_{x} \quad & f(x, \alpha) \\
\text{s. t.} \quad & x \in X
\end{aligned}
$$

(制約条件が α に依存しないケース)

- $X^*(\alpha) = \{x \in X \mid v(\alpha) = f(x, \alpha)\}$ とする.
  (解対応 (solution correspondence))

命題 1.3

1. $X^*(\alpha)$ がつねに非空で，α について「上半連続」である
2. $X^*(\bar{\alpha})$ は唯一の要素からなる ($\bar{x}$ とする)
3. $f(x,\alpha)$ は α について偏微分可能で，各 $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x,\alpha)$ は (x,α) について連続である

とする．このとき，

- $v(\alpha)$ は $\alpha = \bar{\alpha}$ で微分可能で，
- 包絡線公式

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{x},\bar{\alpha}) \qquad (j = 1,\ldots,M)$$

  が成り立つ．

- 条件 1 は，X がコンパクトで $f(x,\alpha)$ が (x,α) について連続ならば成立．
- 条件 3 で，$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}$ の連続性の条件は落とせない．$\rightarrow$ Oyama and Takenawa

- X がパラメタに依存しないような最適化問題を考えているが，価格理論で出てくる最適価値関数
  - 間接効用関数
  - 支出関数
  - 利潤関数
  - 費用関数

  に対してはこのバージョンで十分.
- たとえば，間接効用関数については，予算制約式を何らかの x_i について解いて効用関数に代入すればよい.

間接効用関数の性質

命題 1.4
間接効用関数 $v(p, I)$ は以下を満たす：

1. 0 次同次性：$v(\alpha p, \alpha I) = v(p, I)$ (すべての $\alpha > 0$ に対して)
2. $v(p, I)$ は I について増加，p_i について減少

   効用関数 $u(x)$ が局所非飽和性を満たすならば，$v(p, I)$ は I について厳密に増加
3. $v(p, I)$ は準凸関数

- 局所非飽和性

  どんな x と $\varepsilon > 0$ に対しても，$\|x' - x\| < \varepsilon$ なる x' が存在して $u(x') > u(x)$ が成り立つ．

凹関数・凸関数

定義 1.1

$X \subset \mathbb{R}^N$ が凸集合 (convex set) であるとは，任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して $(1-\lambda)x + \lambda y \in X$ が成り立つことをいう.

定義 1.2

$X \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする.

- $f\colon X \to \mathbb{R}$ が凹関数 (concave function) であるとは，任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

  が成り立つことをいう.

- $f\colon X \to \mathbb{R}$ が凸関数 (convex function) であるとは，$-f$ が凹関数であることをいう.

準凹関数・準凸関数

定義 1.3

$X \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする.

- $f\colon X \to \mathbb{R}$ が準凹関数 (quasi-concave function) であるとは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ が凸集合であることをいう.
- $f\colon X \to \mathbb{R}$ が準凸関数 (quasi-convex function) であるとは, $-f$ が準凹関数であることをいう.

間接効用関数最小化問題

- $(p, I) = (\bar{p}, \bar{I})$ のときの最適解を $\bar{x}$ とおいて固定する.
- 次の問題を考える：

$$\begin{aligned} \min_{p,I} \quad & v(p, I) - u(\bar{x}) \\ \text{s. t.} \quad & p \cdot \bar{x} = I \end{aligned}$$

- $(p, I) = (\bar{p}, \bar{I})$ はこの問題の解である.
- p_i-I 平面, p_i-p_j 平面に図を書いて次を確かめよ：
  - Roy の等式

$$\bar{x}_i = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\bar{p}, \bar{I})}{\frac{\partial v}{\partial I}(\bar{p}, \bar{I})}$$

  - Houthakker の等式

$$\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} = \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\bar{p}, \bar{I})}{\frac{\partial v}{\partial p_j}(\bar{p}, \bar{I})}$$

支出最小化問題

$$\begin{aligned} \min_x \quad & p \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & u(x) = t \end{aligned}$$

$$(x = (x_1, \ldots, x_N),\ p = (p_1, \ldots, p_N))$$

- 最適解：$h(p, t) \cdots$ 補償需要関数 (Hicks の需要関数)
- 最適価値関数：$e(p, t) \cdots$ 支出関数

命題 1.5 (McKenzie の補題)

$$\frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) = h_i(p, t)$$

証明

Lagrange 法を使った方法：

- $L(x, \mu) = p \cdot x + \mu(t - u(x))$
- 包絡線公式 (命題 1.1) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) &= \frac{\partial L}{\partial p_i}(h(p, t), \mu^*(p, t)) \\ &= x_i\big|_{x=h(p,t)} = h_i(p, t)\end{aligned}$$

別の方法：

- $(p, t) = (\bar{p}, \bar{t})$ のときの最適解を $\bar{h}$ として固定する.
- $p = \bar{p}$ は
$$\max_p e(p, \bar{t}) - p \cdot \bar{h}$$
の解である.
- 1 階条件より
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial p_i}(e(p, \bar{t}) - p \cdot \bar{h})\Big|_{p=\bar{p}} \\ &= \frac{\partial e}{\partial p_i}(\bar{p}, \bar{t}) - \bar{h}_i \end{aligned}$$

支出関数の微分可能性

- $e(p, t)$ は，支出最小化問題の解が一意であるとき，またそのときに限り，p に関して微分可能である．

  $\rightarrow$ Oyama and Takenawa (2018)

支出関数の性質

命題 1.6

支出関数 $e(p,t)$ は以下を満たす：

1. p に関する 1 次同次性：$e(\alpha p,t)=\alpha e(p,t)$ (すべての $\alpha>0$ に対して)
2. $e(p,t)$ は p_i について増加，t について厳密に増加
3. $e(p,t)$ は p について凹関数

- 性質 3 より，$e(p,t)$ が p に関して 2 回微分可能ならばそのヘッセ行列

$$D_p^2 e(p,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_1^2}(p,t) & \cdots & \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_N \partial p_1}(p,t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_1 \partial p_N}(p,t) & \cdots & \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_N^2}(p,t) \end{pmatrix}$$

は半負定値 (negative semi-definite) である,
つまり，すべての $z \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$z^{\mathsf{T}} D_p^2 e(p,t) z \leq 0$$

が成り立つ.

($\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i}(p,t)$ たちが p に関して連続ならば，$D_p^2 e(p,t)$ は対称行列である)

- 補償需要関数 $h(p,t)$ が p に関して連続微分可能であるとする.

  $h(p,t)$ の p に関するヤコビ行列

$$D_p h(p,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p,t) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_N}(p,t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_N}{\partial p_1}(p,t) & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial p_N}(p,t) \end{pmatrix}$$

  (代替行列という)

- 命題 1.5 より, $D_p h(p,t) = D_p^2 e(p,t)$

- 命題 1.5 と命題 1.6 から次が成り立つ.

命題 1.7

代替行列 $D_p h(p,t)$ は以下を満たす：

- $D_p h(p,t)$ は半負定値
- $D_p h(p,t)$ は対称行列
- $D_p h(p,t) p = 0$

効用最大化問題と支出最小化問題の関係

1. $e(p, v(p, I)) = I$

   $h(p, v(p, I)) = x^*(p, I)$

2. $v(p, e(p, t)) = t$

   $x^*(p, e(p, t)) = h(p, t)$

効用最大化問題と支出最小化問題の関係 (厳密な議論)

- 絵を描いてみると当たり前に見えるので，厳密に証明してみる.
- 以下，効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする.
- 効用最大化問題

$$\max_{x} \quad u(x)$$
$$\text{s. t.} \quad p \cdot x \leq I$$

  - $D(p, I)$: (p, I) の下での最適解の集合 (u の連続性より非空) $\cdots$ 需要対応
  - $v(p, I)$: (p, I) の下での最大値 (間接効用関数)
- 支出最小化問題

$$\min_{x} \quad p \cdot x$$
$$\text{s. t.} \quad u(x) \geq t$$

  - $H(p, t)$: (p, t) の下での最適解の集合 (u の連続性より非空) $\cdots$ 補償需要対応
  - $e(p, t)$: (p, t) の下での最小値 (支出関数)

命題 1.8

効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする．このとき次が成り立つ．

1. $p \cdot x < I$ ならば $u(x) < v(p, I)$ (u の局所非飽和性より)

   したがって，すべての $x^* \in D(p, I)$ に対して $p \cdot x^* = I$

2. $u(x) > t$ ならば $p \cdot x > e(p, t)$ (u の連続性より)

   したがって，すべての $h^* \in H(p, t)$ に対して $u(h^*) = t$

命題 1.9 (最適消費の双対性)

効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする．このとき次が成り立つ．

1. $e(p, v(p, I)) = I$

   $H(p, v(p, I)) = D(p, I)$

2. $v(p, e(p, t)) = t$

   $D(p, e(p, t)) = H(p, t)$

証明

1.

- 命題 1.8 より，$p \cdot x < I \Rightarrow u(x) < v(p, I)$

  対偶をとって，$u(x) \geq v(p, I) \Rightarrow p \cdot x \geq I$

  これは $e(p, v(p, I)) \geq I$ を意味する．

- 任意に $x^* \in D(p, I)$ をとる．

  すると，$p \cdot x^* \leq I$ かつ $u(x^*) = v(p, I)$ を満たす．

  したがって，$e(p, v(p, I)) \leq p \cdot x^* \leq I$ であるが，
  $e(p, v(p, I)) \geq I$ と合わせて $e(p, v(p, I)) = p \cdot x^* = I$ が成り立ち，

  したがって，$x^* \in H(p, v(p, I))$ である．

- $x^* \in D(p, I)$ は任意だったので，$D(p, I) \subset H(p, v(p, I))$ が成り立つ．

- ($H(p, v(p, I)) \subset D(p, I)$ は最後に示す．)

2.

- 命題 1.8 より，$u(x) > t \Rightarrow p \cdot x > e(p,t)$

  対偶をとって，$p \cdot x \leq e(p,t) \Rightarrow u(x) \leq t$

  これは $v(p, e(p,t)) \leq t$ を意味する.

- 任意に $h^* \in H(p,t)$ をとる.

  すると，$u(h^*) \geq t$ かつ $p \cdot h^* = e(p,t)$ を満たす.

  したがって，$v(p, e(p,t)) \geq u(h^*) \geq t$ であるが，$v(p, e(p,t)) \leq t$ と合わせて $v(p, e(p,t)) = u(h^*) = t$ が成り立ち，

  したがって，$h^* \in D(p, e(p,t))$ である.

- $h^* \in H(p,t)$ は任意だったので，$H(p,t) \subset D(p, e(p,t))$ が成り立つ.

- ($D(p, e(p,t)) \subset H(p,t)$ は最後に示す．)

- $H(p,t) \subset D(p,e(p,t))$ で $t = v(p,I)$ として,
  $H(p,v(p,I)) \subset D(p,e(p,v(p,I))) = D(p,I)$.
- $D(p,I) \subset H(p,v(p,I))$ で $I = e(p,t)$ として,
  $D(p,e(p,t)) \subset H(p,v(p,e(p,t))) = H(p,t)$.

Roy の等式と McKenzie の補題

- $v(p, e(p,t)) = t$ を p_i で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, e(p,t)) + \frac{\partial v}{\partial I}(p, e(p,t)) \frac{\partial e}{\partial p_i}(p,t) = 0 \tag{1}$$

- Roy から McKenzie を導く：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial p_i}(p,t) &= -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, e(p,t))}{\frac{\partial v}{\partial I}(p, e(p,t))} && \text{((1) より)} \\
&= x_i^*(p, e(p,t)) && \text{(Roy の等式より)} \\
&= h_i(p,t) && \text{(双対性)}
\end{aligned}$$

- McKenzie から Roy を導く：

$$
\begin{aligned}
-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p,I)}{\frac{\partial v}{\partial I}(p,I)} &= -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p,e(p,v(p,I)))}{\frac{\partial v}{\partial I}(p,e(p,v(p,I)))} && \text{(双対性)} \\
&= \frac{\partial e}{\partial p_i}(p,v(p,I)) && \text{((1) より)} \\
&= h_i(p,v(p,I)) && \text{(McKenzie より)} \\
&= x_i^*(p,I) && \text{(双対性)}
\end{aligned}
$$

練習問題

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2$$

1. 需要関数 $x^*(p, I)$，間接効用関数 $v(p, I)$ を求めよ.
2. 補償需要関数 $h(p, t)$，支出関数 $e(p, t)$ を求めよ.
3. Roy の等式と McKenzie の補題が成り立つことを確認せよ.
4. 双対性が成り立つことを確認せよ.

Slutzky の等式

命題 1.10 (Slutzky の等式)

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(p, v(p, I)) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}(p, I) + \frac{\partial x_i^*}{\partial I}(p, I)x_j^*(p, I)$$

- 右辺を $s_{ij}(p, I)$ とおく：

$$s_{ij}(p, I) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}(p, I) + \frac{\partial x_i^*}{\partial I}(p, I)x_j^*(p, I)$$

- Slutzky 行列

$$S(p, I) = \begin{pmatrix} s_{11}(p, I) & \cdots & s_{1N}(p, I) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1}(p, I) & \cdots & s_{NN}(p, I) \end{pmatrix}$$

- Slutzky の等式 (行列表示)

$$\underbrace{D_p h(p, v(p, I))}_{\text{代替行列}} = \underbrace{S(p, I)}_{\text{Slutzky 行列}}$$

- $S(p, I)$: (原理上) 観察可能

  $D_p h(p, v(p, I))$: 数学対象物 (よい性質を持つ)

- Slutzky の等式と命題 1.7 から次が成り立つ.

命題 1.11

Slutzky 行列 $S(p, I)$ は以下を満たす：

- $S(p, I)$ は半負定値
- $S(p, I)$ は対称行列
- $S(p, I)p = 0$

証明

- 双対性より，すべての p, t に対して $h_i(p,t) = x_i^*(p, e(p,t))$ が成り立つ.

  両辺をそれぞれ p_j で微分する.

凹関数の微分による特徴付け (1 変数のケース)

- $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする.

命題 1.12

$f\colon I \to \mathbb{R}$ は 2 回微分可能であるとする．次の条件は同値である：

1. f は凹関数.
2. すべての $x, y \in I$ に対して $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.
3. f' は減少関数.
4. すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \leq 0$.

- 「1 ⇔ 2」は，多変数の場合も，$f'(x)$ を勾配ベクトル $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)\right)$ に置きかえることで成り立つ.

証明

$1 \Rightarrow 2$

- f が凹関数であるとする．$x < y$ を任意にとる．

  $x < z < y$ とし，$\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ とする ($z = (1-\lambda)x + \lambda y$).

  凹関数の定義より $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f(z)$ である.
- これより $\lambda(f(y) - f(x)) \leq f(z) - f(x)$ なので，すなわち

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

- $z \to x$ として $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(x)$，すなわち $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.

$2 \Rightarrow 3$

- 1 より，$x < y$ ならば $f'(x) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(y)$.

$3 \Rightarrow 1$

- f' が減少関数であるとする. $x, y \in I$ と $\lambda \in (0,1)$ を任意に固定する.

  $x < y$ と仮定する.

- $x < z < y$ なる z に対して

  $$g(z) = f((1-\lambda)x + \lambda z) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(z)$$

  を考える.

  $g(y) \geq 0$ を示したい.

- まず $g(x) = 0$ である.

- また, 微分して

  $$g'(z) = \lambda f'((1-\lambda)x + \lambda z) - \lambda f'(z)$$

  $(1-\lambda)x + \lambda z < z$ なので $g'(z) \geq 0$ である.

- したがって $g(y) \geq 0$ を得る.

凹関数の微分による特徴付け (多変数のケース)

- $U \subset \mathbb{R}^N$ を開凸集合とする.

命題 1.13

$f: U \to \mathbb{R}$ は 2 回微分可能であるとする．次の条件は同値である：

1. f は凹関数.
2. すべての $x \in U$ と $x + z \in U$ なる $z \in \mathbb{R}^N$ に対して $g(\lambda) = f(x + \lambda z)$ は凹関数.
3. すべての $x \in U$ に対して，x における f のヘッセ行列 $D^2 f(x)$ は半負定値，すなわち，すべての $z \in \mathbb{R}^N$ に対して $z^\top D^2 f(x) z \leq 0$.

- $$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1}(x) & \cdots & f_{NN}(x) \end{pmatrix}$$

  (ただし $f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$)

証明

$1 \Leftrightarrow 2$

- $\lambda, \lambda' \in [0,1]$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned} g((1-t)\lambda + t\lambda') &= f(x + ((1-t)\lambda + t\lambda')z) \\ &= f((1-t)(x+\lambda z) + t(x+\lambda' z)) \end{aligned}$$

と書けることより.

$2 \Leftrightarrow 3$

- 1 変数関数 $g(\lambda)$ が凹関数であるための必要十分条件は $g''(\lambda) \leq 0$ である.
- $N = 2$ として $g'(\lambda)$, $g''(\lambda)$ を計算してみる：

$$
\begin{aligned}
g'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) \\
&= f_1(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1 + f_2(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2 \\
g''(\lambda) &= f_{11}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1^2 + f_{12}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1 z_2 \\
&\qquad + f_{21}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2 z_1 + f_{22}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2^2 \\
&= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} z_1 + f_{12} z_2 \\ f_{21} z_1 + f_{22} z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= z^{\mathsf{T}} D^2 f(x + \lambda z) z
\end{aligned}
$$

利潤最大化問題

- 1 産出財のケース

  生産関数 $f(x) \quad (x = (x_1, \ldots, x_M))$

  (一般の生産技術は「生産可能性集合」で表される．
  一般ケースは分離定理を学ぶ際に扱う．)

- 利潤最大化問題

$$\max_{y,x} \quad py - w \cdot x$$
$$\text{s. t.} \quad y = f(x)$$

- 最適解
  - $y^*(p, w)$：供給関数
  - $x^*(p, w)$：要素需要関数

- 最適価値関数

  $\pi(p, w)$：利潤関数

包絡線公式

- $y = f(x)$ を代入して $\pi(p,w) = \max_x pf(x) - w \cdot x$
- 包絡線公式より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial p}(p,w) &= \frac{\partial}{\partial p}(pf(x) - w \cdot x)\Big|_{x=x^*(p,w)} \\
&= f(x)|_{x=x^*(p,w)} = f(x^*(p,w)) = y^*(p,w) \\
\frac{\partial \pi}{\partial w_i}(p,w) &= \frac{\partial}{\partial w_i}(pf(x) - w \cdot x)\Big|_{x=x^*(p,w)} \\
&= -x_i|_{x=x^*(p,w)} = -x_i^*(p,w)
\end{aligned}$$

命題 1.14 (Hotelling の補題)

$$\frac{\partial \pi}{\partial p}(p,w) = y^*(p,w), \qquad \frac{\partial \pi}{\partial w_i}(p,w) = -x_i^*(p,w)$$

利潤関数の性質

命題 1.15

利潤関数 $\pi(p, w)$ は以下を満たす：

1. 1 次同次性：$\pi(\alpha p, \alpha w) = \alpha\pi(p, w)$ (すべての $\alpha > 0$ に対して)
2. $\pi(p, w)$ は p について増加，w_i について減少
3. $\pi(p, w)$ は凸関数

生産関数と利潤関数の双対性

- 簡単化のため，1 投入財のケースを考える.

  生産関数 $f(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$

  - f は凹関数であるとする.
  - f は微分可能とする.

- 産出財を基準財として，$p = 1$ と基準化する.

  $\pi(1, w)$ を $\pi(w)$ と書くことにする ($w \in \mathbb{R}_{++}$)：

  $$\pi(w) = \max_x f(x) - wx$$

- 利潤関数 $\pi(w)$ から生産関数 $f(x)$ を再現できる！ $\rightarrow$

命題 1.16

$f(x) = \min_w \pi(w) + wx$

- 多投入財のケースでも成り立つ.
- f の微分可能性は不要.

  (証明で「分離定理」を用いることになる.)
- 「生産可能性集合」による一般のケースにおいても同様のことが成り立つ.

  (「分離定理」を学ぶ際に扱う.)

証明

- 示したい等式の右辺を

$$g(x) = \min_w \pi(w) + wx$$

とおく．$g(x) = f(x)$ を示したい．

- まず，π の定義より

$$\pi(w) + wx \geq f(x) \qquad (\text{すべての } w \text{ に対して})$$

なので，$g(x) \geq f(x)$ が成り立つ．

- 次に，任意に $x = \bar{x}$ を固定して $\bar{w} = f'(\bar{x})$ とおく.
- f が凹関数であることより，

$$f(\bar{x}) + \bar{w}(x - \bar{x}) \geq f(x) \qquad (\text{すべての } x \text{ に対して})$$

すなわち

$$f(\bar{x}) - \bar{w}\bar{x} \geq f(x) - \bar{w}x \qquad (\text{すべての } x \text{ に対して})$$

が成り立つ.
- これは $\pi(\bar{w}) = f(\bar{x}) - \bar{w}\bar{x}$ を意味する.
- したがって，

$$g(\bar{x}) \leq \pi(\bar{w}) + \bar{w}\bar{x} = f(\bar{x})$$

が成り立つ.

例

- $f(x) = \dfrac{1}{\alpha}x^{\alpha} \qquad$ (ただし $0 < \alpha < 1$)