Efficiency, envy-freeness, and Bayesian incentive compatibility in economies with one indivisible good and money

藤中 裕二 (神戸大学大学院経済学研究科博士課程３年)
Email: fujinaka@stu.kobe-u.ac.jp
URL: http://www.geocities.jp/yuji_fujinaka/

2007年３月６日
一橋ゲーム理論ワークショップ2007

Introduction

- **非分割財がひとつ、貨幣による所得移転が可能な経済。**
  — **迷惑施設の立地問題** (NIMBY problem)
  - Kunreuther, Kleindorfer, Knez, and Yaksick (1987), Kleindorfer and Serter (1994), Sakai (2005a,b)

- $\left.\begin{array}{c}\text{社会的に望ましい性質}\\\text{インセンティブに関する性質}\end{array}\right\}$ **の両方を満たす配分ルールが存在するか?**

- **社会的に望ましい性質** — **効率性** (efficiency) **と無羨望性** (envy-freeness)

- **インセンティブに関する性質** — strategy-proofness

- Strategy-proofness: **自分の選好を表明するゲーム** (**直接表明ゲーム**) **において、正直に選好を表明することが常に望ましい。**

Question: **効率性と無羨望性を満たし、かつ**strategy-proofness**を満たす配分ルールは存在するか**?

Answer: No.

— **効率性と**strategy-proofness**を同時に満たす配分ルールは存在しない。**

- Holmström (1979), Ohseto (2000), Schummer (2000)

・**人々が弱支配戦略をとるとき、効率性と無羨望性を満たす配分は実現できない。**

・Strategy-proofness**より弱いインセンティブに関する性質を考えると、どうなるか**?

・Bayesian incentive compatibility: **他の人が正直に選好を表明していることを所与としたとき、自分も正直に選好を表明することが期待効用を最大にする。**

Question: **効率性と無羨望性を満たし、かつ**Bayesian incentive compatibility
を満たす配分ルールは存在するか?

- **効率性と**Bayesian incentive compatibility**を満たす配分ルールは存在する。**
  - Arrow (1979), d'Aspremont and Gérard-Varet (1979)

  — **ただし、この配分ルールは無羨望性を満たさない。**

- **公平性に関する議論は、ほとんどされていない。**

- **効率性と無羨望性、**Bayesian incentive compatibility**の**3**つの性質を満たす配分ルールが存在するどうかは、まだわからない。**

Answer: **Yes**.

Literature

	Strategy-proofness	Bayesian incentive compatibility
効率性	No Holmström (1979)	Yes Arrow (1979) d'Aspremont & Gérard-Varet (1979)
無羨望性	Yes Ohseto (2006)	Yes Ohseto (2006)
効率性 & **無羨望性**	No Holmström (1979)	Yes Fujinaka (2006)

- Fujinaka (2006)
  — Private value model (**人々は、非分割財に対して私的な評価を持つ。**)
- Morgan (2004)
  — Common value model (**人々は、非分割財に対して共通の評価を持つ。**)

Model

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, agent**の集合。**

- **非分割財がひとつ、貨幣による所得移転が可能。**

- Assignment vector, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^I$ s.t. $\sum_{i \in I} x_i = 1$.
  — $x_i = 1$: agent i**は非分割財を受け取っている。**
  — $x_i = 0$: agent i**は非分割財を受け取っていない。**

- Monetary transfer vector, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^I$ s.t. $\sum_{i \in I} t_i \leq 0$.
  — $t_i \geq 0$: agent i**は貨幣を受け取っている。**
  — $t_i < 0$: agent i**は貨幣を支払っている。**

- **配分**, $(x, t) = (x_i, t_i)_{i \in I} \in A$.
  — Assignment vector x**と**monetary transfer vector t**の組。**
  — (x_i, t_i) : agent i**の消費。**
  — A : **配分の集合。**

Preference

- Agentの選好は準線形。

- Agent iのタイプ、$v_i \in \mathbb{R}$。
  — Agent iが非分割財から得る効用。

- Agent iのタイプは、$\mathcal{V}_i \equiv [\underline{v}, \overline{v}] \subset \mathbb{R}$ $(\underline{v} < \overline{v})$上に分布。
  — 独立に分布。
  — $F : \mathcal{V}_i \to [0,1]$： 分布関数。すべてのagentについて同じ。
  — $f \equiv F'$： 密度関数。

- タイプv_iのagent iの効用関数、$u_i(\,\cdot\,; v_i) : \{0,1\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$u_i(x_i, t_i; v_i) = x_i v_i + t_i.$$

Type profile

- タイププロファイル、

$$\mathsf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{V}$$
$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

- i 以外のタイププロファイル、

$$\mathsf{v}_{-i} \equiv (v_1, , \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \in \mathcal{V}_{-i}$$
$$\mathcal{V}_{-i} \equiv \mathcal{V}_1 \times \dots \mathcal{V}_{i-1} \times \mathcal{V}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

- $f_{-i}(\mathsf{v}_{-i})$: $\mathsf{v}_{-i} \in \mathcal{V}_{-i}$ のjoint density、

$$f_{-i}(\mathsf{v}_{-i}) \equiv f(v_1) \times \dots f(v_{i-1}) \times f(v_{i+1}) \times \cdots \times f(v_n).$$

Allocation rule

- 配分ルール、$\phi : \mathcal{V} \to A$. 各 $\mathsf{v} \in \mathcal{V}$ に、ある配分

$$\phi(\mathsf{v}) = (\phi_i(\mathsf{v}))_{i \in I} = (x_i(\mathsf{v}), t_i(\mathsf{v}))_{i \in I} \in A$$

を割り当てる。

Efficiency and envy-freeness

- Efficiency:

任意の $\mathsf{v} \in \mathcal{V}$ **について、**

$$\nexists\,(x', t') \in A \text{ s.t. } \begin{array}{ll} u_i(x'_i, t'_i; v_i) \geq u_i(\phi_i(\mathsf{v}); v_i) & \forall\, i \in I, \\ u_j(x'_j, t'_j; v_j) > u_j(\phi_j(\mathsf{v}); v_j) & \exists\, j \in I. \end{array}$$

- Envy-freeness:

任意の $\mathsf{v} \in \mathcal{V}$ **について、任意の** $i, j \in I$ **について、**

$$u_i(\phi_i(\mathsf{v}); v_i) \geq u_i(\phi_j(\mathsf{v}); v_i).$$

Bayesian incentive compatibility

- Bayesian incentive compatibility:

任意の$i \in I$**、任意の**$v_i \in \mathcal{V}_i$**について、**

$$\int_{\mathcal{V}_{-i}} u_i(\phi_i(v_i, \mathsf{v}_{-i}); v_i) f_{-i}(\mathsf{v}_{-i}) d\mathsf{v}_{-i} \geq \int_{\mathcal{V}_{-i}} u_i(\phi_i(v'_i, \mathsf{v}_{-i}); v_i) f_{-i}(\mathsf{v}_{-i}) d\mathsf{v}_{-i},$$

for all $v'_i \in \mathcal{V}_i$.

— **自分の選好を表明するゲーム (直接表明ゲーム) を考える。**

— **他の**agent**が真の選好を表明していることを所与として、タイプが**v_i**である** agent i**にとって、真の選好**v_i**を表明することが、期待効用を最大にする。**

Existence theorem

- 任意の$\mathsf{v} \in \mathcal{V}$、$k = 1, 2, \ldots, n$について、
  — v^k : $\mathsf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$の中で$k$番目に大きいタイプ。

- $\phi^*(\mathsf{v}) = (x_i^*(\mathsf{v}), t_i^*(\mathsf{v}))_{i \in I}$:
  — 任意の$\mathsf{v} \in \mathcal{V}$について、
    - $j \in I$を、$x_j^*(\mathsf{v}) = 1$を満たすagentとする。

$$v_j = \mathsf{v}^1$$

$$t_i^*(\mathsf{v}) = \begin{cases} -\dfrac{n-1}{n} \times (\mathsf{v}^1 - \displaystyle\int_{\mathsf{v}^2}^{\mathsf{v}^1} F(v)dv) & \text{if} \quad i = j \\ \dfrac{1}{n} \times (\mathsf{v}^1 - \displaystyle\int_{\mathsf{v}^2}^{\mathsf{v}^1} F(v)dv) & \text{if} \quad i \in I \setminus \{j\} \end{cases}$$

—タイプが1番大きいagentが、(i) 非分割財を消費し、
(ii) 他の人に$\frac{1}{n}(\mathsf{v}^1 - \int_{\mathsf{v}^2}^{\mathsf{v}^1} F(v)dv)$を支払う。

Theorem 1.

$$\phi^* \text{は} \left\{ \begin{array}{c} \text{efficiency} \\ \text{envy-freeness} \\ \text{Bayesian incentive compatibility} \end{array} \right\} \text{を満たす。}$$

- ϕ^* のもとでの直接表明ゲームでは、真の選好が表明され、効率性と無羨望性を満たす配分が実現する。
  — Strategy-proofness に関する結果とは対照的。

- ここで直接表明ゲームとは、非分割財に対する評価を表明するゲーム。
  — 非分割財をいくらで買うかを bid するオークションに似ている。
  — つまり、オークションのようなメカニズムを通じて、効率性と無羨望性を満たす配分が実現することになる。

• Theorem 1 **は、3つの性質を満たす配分ルールが存在することを示した。**

• ϕ^* **以外に、3つ性質を満たす配分ルールがあるかもしれない。**

Question: ϕ^* **以外に、効率性、無羨望性、** Bayesian incentive compatibility **を満たす配分ルールは存在するか**?

Answer: **よくわからない。**

•あらたに所得移転に関する性質を追加的に考えて、その性質を満たす配分ルールの中で、上の問題を考えてみる。

• Anonymous and additive transfer property:
— **所得移転が、**(i) **匿名的、つまりタイプの大きさのみに依存。**
(ii) **タイプの大きさについて加法的。**

Anonymous and additive transfer property

- 任意の$\mathsf{v} \in \mathcal{V}$、$k = 1, 2, \ldots, n$について、
  - v^k : $\mathsf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$の中で$k$番目に大きいタイプ。
  - $k(\mathsf{v})$: $\mathsf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$の中で$k$番目に大きいタイプをもつagent。

- Anonymous and additive transfer property:

$\phi(\cdot) = (x_i(\cdot), t_i(\cdot))_{i \in I}$に対して、

$\tau_\ell^k : [\underline{v}, \overline{v}] \to \mathbb{R},\ k, \ell = 1, 2, \ldots, n$が存在して、
任意の$\mathsf{v} \in \mathcal{V}$について、任意の$\ell = 1, 2, \ldots, n$について、

$$t_{\ell(\mathsf{v})}(\mathsf{v}) = \tau_\ell^1(\mathsf{v}^1) + \tau_\ell^2(\mathsf{v}^2) + \cdots + \tau_\ell^n(\mathsf{v}^n)$$

- きつい性質。
- しかし、ある意味で、配分ルールの "単純さ" を要請している。
- よく議論される配分ルールはこの性質を満たす。
  - First-price auction rule、second-price auction rule。
  - Shapley value allocation rule。
  - Equal welfare rule (Tadenuma and Thomson, 1993)。

Characterization theorem

Theorem 2.

$$\phi\colon \left\{ \begin{array}{c} \text{efficiency} \\ \text{envy-freeness} \\ \text{Bayesian incentive compatibility} \\ \text{anonymous and additive transfer property} \end{array} \right\} \iff \phi = \phi^*$$

- **この所得移転に関する性質を満たす配分ルールに限ると、さっきの問題の答えは、**

  No. — ϕ^* **以外に、3つの性質を満たす配分ルールは存在しない。**

- **この所得移転に関する性質を配分ルールの"単純さ"を要請する性質と考えると、**

  "単純な"配分ルールの中で、3つの望ましい性質を満たす配分ルールは、ϕ^***のみ。**

Conclusion

- **効率性、無羨望性、**Bayesian incentive compatibility**が両立する。**

— **直接表明ゲームにおいて、すべての**agent**が真の選好を表明し、効率性と無羨望性を満たす配分が実現する。**

- **上の**3**つの性質と、所得移転に関する性質** (anonymous and additive transfer property)**の**4**つの性質を満たす配分ルールの特徴づけ。**

— **効率性**＋**無羨望性**＋**インセンティブの性質**＋"**単純さ**" $\Longleftrightarrow$ ϕ^*

— **所得移転に関する性質は、かなりきつい性質。**

— **他に、**3**つの性質を満たす配分ルールがあるかもしれない。**