収穫逓増下でのオプション行使戦略の均衡ダイナミクス:
Core-Peripheryモデルを例として

Core-Periphery Equilibrium Dynamic Model with Economic Uncertainty

東北大学大学院情報科学研究科
織田澤 利守
赤松 隆

March, 2007

研究背景

- 新経済地理学
  - 経済活動の空間的な集中・分散メカニズムの説明
- Core-Periphery (CP)モデル　Krugman (1991a)
  - 財の輸送費用が立地集積の有無に与える影響を分析
  - 成果
    - 立地集積が発生するメカニズムを構築
  - 課題
    - 複数の均衡解が存在する.
    - どの均衡解が選ばれるか説明できない

均衡選択モデルが必要 ⇒ CPモデルを動学に拡張

既往研究

- CPモデルにおける人口移動ダイナミクス
  - 複製動学(Replicator Dynamics)　Krugman (1991a) etc.
    - 仮定：移動主体は“近視眼的”な意思決定を行う.
    - 結果：均衡解が“History”(初期時点での立地パターン)のみに依存する.
  - 予見的動学(Forward-looking Dynamics) Krugman(1991b), Fukao&Benabou(1993) ,Ottaviano (2001),Baldwin (2001)
    - 仮定：移動主体は“完全予見的”な意思決定を行う.
    - 結果：均衡解が“Expectation *(Self-fulfilling prophecy)*”(自己実現的期待)に依存する⇒解の不定性

⇒ どちらのモデルも均衡選択の要因が両極端

着眼点と結果

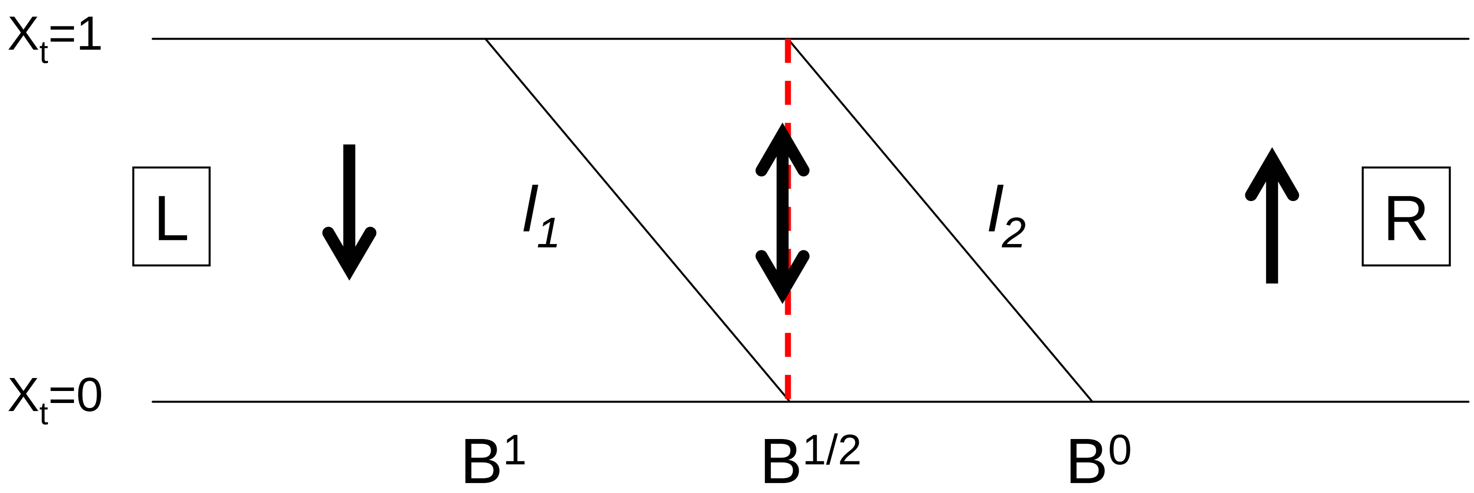
- “*Expectation*”の頑健性について検討
  - 経済環境の不確実性
  - Krugman型ダイナミクス (完全予見的，混雑)
- “*Expectation*”という均衡選択原理はロバストではない！
  - 不確実性の導入により均衡経路が一意に決まる
  - 超長期的な集積・分散パターンの性質

＊本モデルと既存研究の対応

	移動主体	経済システム	均衡解選択原理
複製動学	近視眼的	確定的	Historyのみに依存
予見的動学	完全予見的	確定的	Expectationのみに依存
本モデル	完全予見的	確率的	？

均衡選択の関連研究(1)

- 2×2game with Random matching
  - Static:Harsanyi&Selton(1988), Carlsson&Damme(1993)
  - Dynamic: Kandori *et.al.*(1993), Matsui&Matsuyama(1995)
  - Stochastically dynamic: Burdzy *et.al.*(2001)



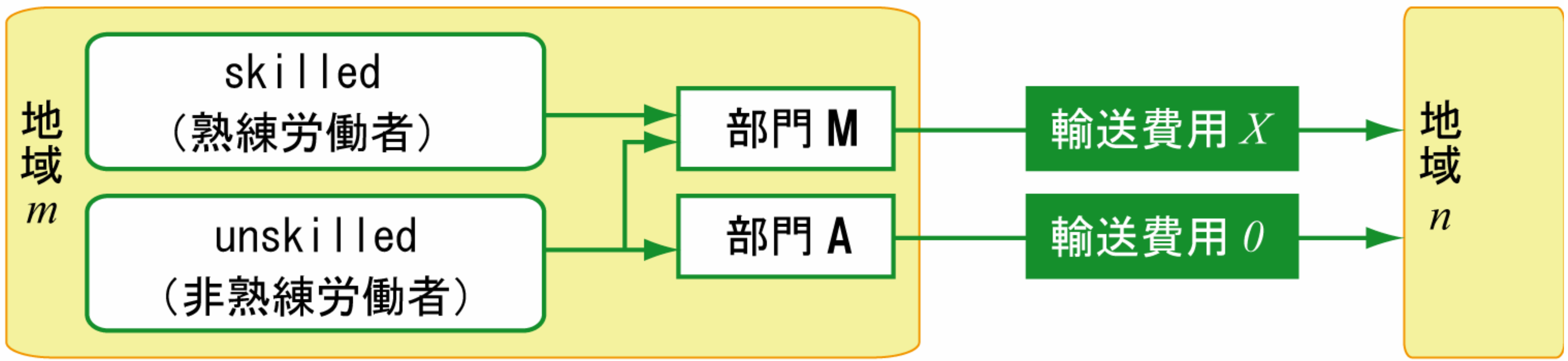
均衡選択の関連研究(2)

- Increasing return economy with <u>Poisson choice revisions</u>
  - Deterministic: Matsuyama(1991)
  - Stochastic: Frankel&Pauzner(2001)

- Increasing return economy with <u>Equilibrium dynamics</u>
  - Deterministic: Krugman(1991b), Fukao&Benabou(1993)
    :移住に混雑現象，移住タイミングに関する均衡状態
  - Stochastic: 織田澤&赤松
    :不確実性下における（地域間移住）オプション行使タイミングの均衡状態を考慮

モデルの概要

- ２地域（m=1,2 ; $m \neq n$）からなる経済
  - 生産要素：skilled（熟練労働者）・unskilled（非熟練労働者）
  - ２部門
    - 部門M：独占的競争が行われ，収穫逓増の部門
    - 部門A：完全競争的で，収穫不変の部門
  - 輸送費用
    - 部門M：時々刻々と確率的に変動する輸送費用Xを仮定
    - 部門A：輸送費用はかからない



Footloose Entrepreneur (FE) モデル

消費者行動

(Forslid&Ottaviano[2003])

- skilledとunskilledの2要素が消費者として振舞う
- 地域mの消費者は予算制約の下，Dixit-Stiglitz型の効用関数を最大化する

$$\max . U_m = M_m^{\lambda} A_m^{1-\lambda}$$

$$M_m = \left[\int_{s \in N} d_m(s)^{(\xi-1)/\xi} ds \right]^{\xi/(\xi-1)}$$

subject to

$$\int_{s \in N_m} p_{mm}(s) d_{mm}(s) ds + \int_{s \in N_n} p_{mn}(s) d_{mn}(s) ds + p_m^A A_m = Y_m$$

Y_m : 地域mの所得（skilledの所得＋unskilledの所得）

M_m : 工業品の消費を示す合成された指数　A_m : 農業品の消費

λ : 工業品の支出割合を表す定数

p_{mn} : 地域mで作られた工業品sの地域nでの価格

d_{mn} : 地域mで作られた工業品sの地域nでの需要

Footloose Entrepreneur (FE) モデル

生産者行動

- 部門A
  - 同質な財を完全競争の下，収穫不変の技術により生産

$$p_m^A = w_m^A = 1$$

- 部門M
  - 異質な財sを独占的競争の下，収穫逓増の技術により生産
  - 企業の総生産費用：$TC_m = \alpha w_m + \beta x_m(s)$
  - 利潤最大化行動：

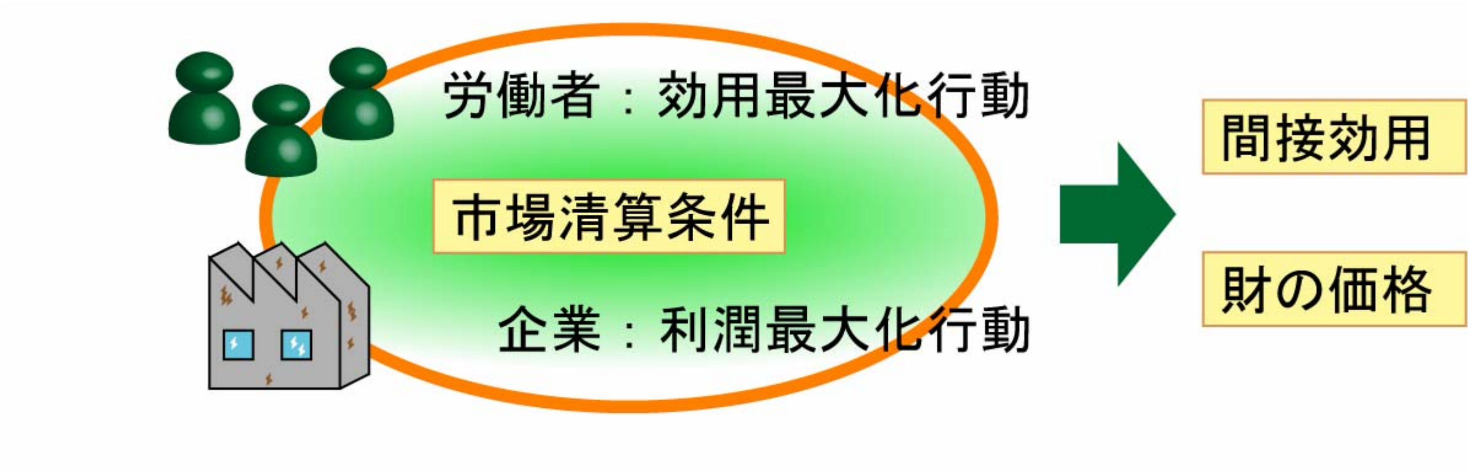
$$\Pi_m(s) = p_{mm}(s)d_{mm}(s) + p_{mn}(s)d_{mn}(s) - TC_m(s)$$

p_{mn}：地域mで作られた工業品sの地域nでの価格
d_{mn}：地域mで作られた工業品sの地域nでの需要
w_m：地域mのskilledの賃金　τ：氷解費用

短期均衡の概要

短期の市場均衡

- 地域 m（$m = 1, 2; m \neq n$）の間接効用$W_m(X,h)$が，輸送費用X, 地域1の人口hの陽関数として決定



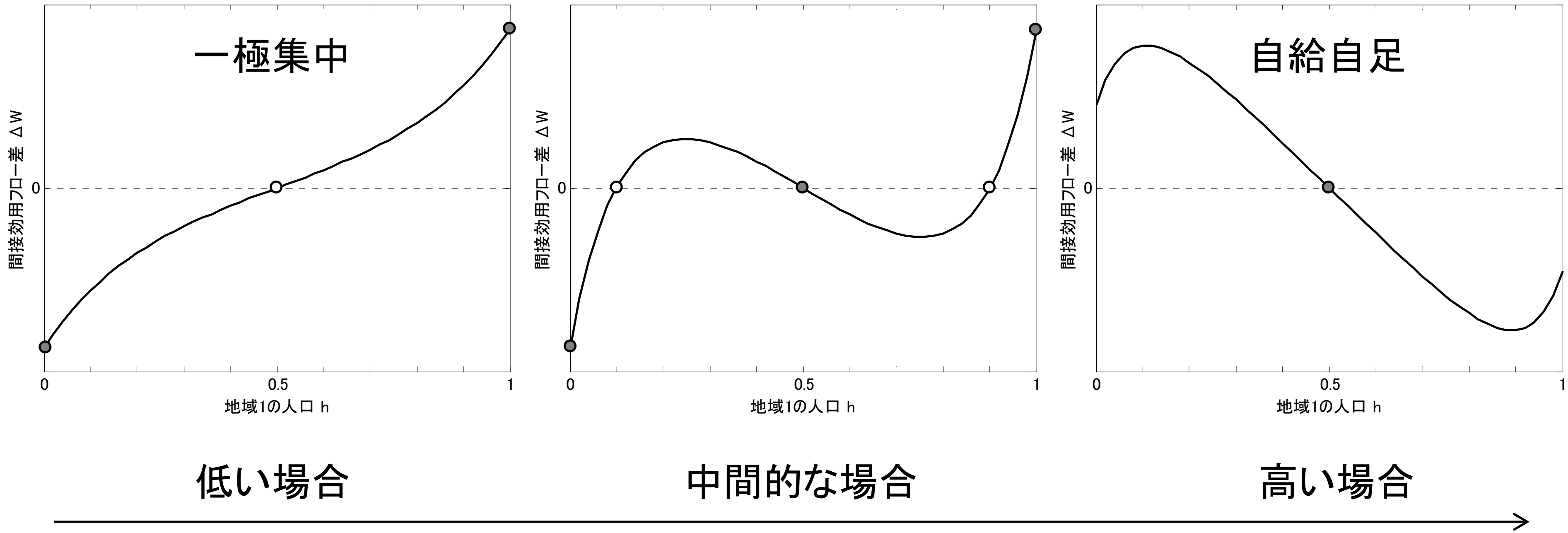
$$W_m(X,h) = \lambda^{\lambda}(1-\lambda)^{\lambda} w_m(X,h) P_m^{-\lambda}(h)$$

λ :工業品の支出割合を表す定数

w_m :地域mのskilledの賃金　P_m :地域mの価格指数

輸送費用と短期均衡パターン

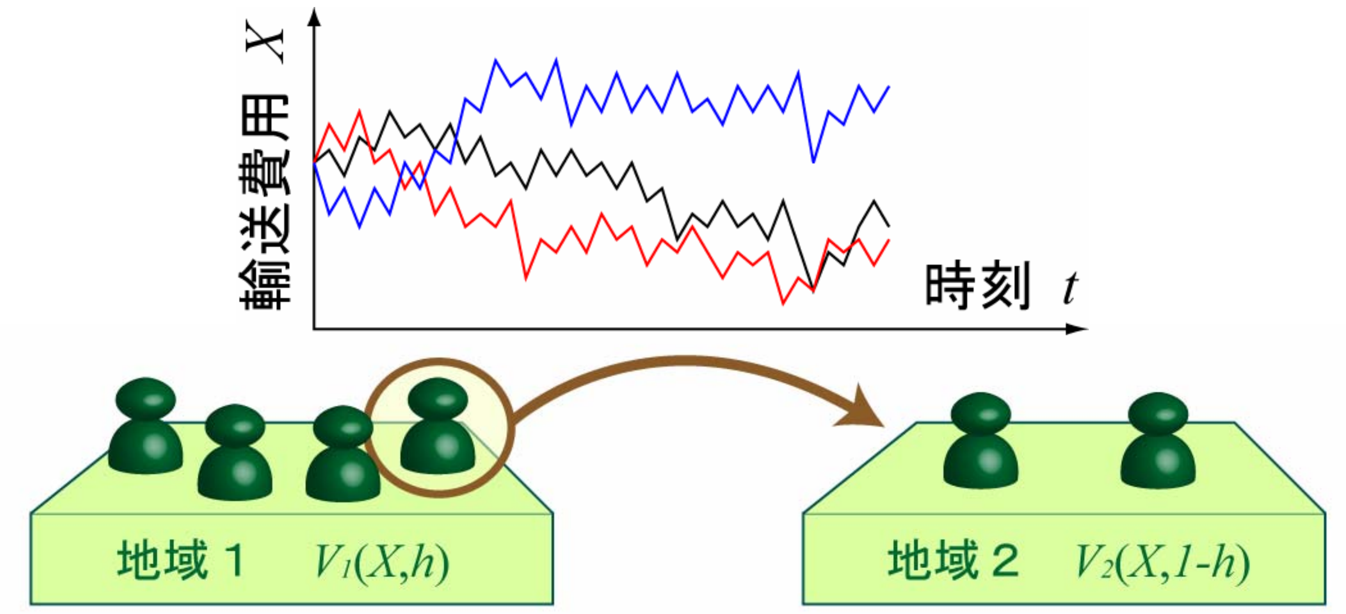
■ 地域間人口分布と間接効用フロー差 $\Delta W = W_1 - W_2$



集積力と分散力のトレードオフ

長期人口移動の枠組み

- 長期（生産要素の移動あり：skilledのみmobile）
  - 輸送費用 X は幾何ブラウン運動に従う：$dX/X = \mu\, dt + \sigma\, dz$
  - 完全予見的な意思決定を行う移動主体を仮定.
    - ▶地域mの価値として，将来効用の期待現在価値 V_m を知覚.
  - 移動主体は，V_mを比較し，移動費用を支払い移住を行う.
    - ▶地域mからnへ，単位時間当たり f_{mn} が移住を行う.



長期：移動主体の行動原理

居住地の選択によって期待総効用を最大化

- 期待総効用

$$J(t,m(s)) \equiv \underbrace{\int_t^{\infty} e^{-r(s-t)} W_{m(s)}(X(s),h(s))ds}_{\text{対象期間中の総正味効用}} - \sum_{k>k(t)} \underbrace{e^{-r(\tau_k-t)} C_{m(s)}(\tau_k)}_{\text{移動費用}}$$

- 間接効用フロー： $W_m(X,h)$
  - ▶ X：輸送費用．確率過程に従うため，間接効用フローも確率的に変動する．
  - ▶ h：地域1の人口（i.e.地域2の人口：$1-h$）
- 移住費用： $C_m(\tau) = f_{mn}(\tau)/\gamma$ $\quad dh(\tau)/dt = f_{21}(\tau) - f_{12}(\tau)$
  - ▶ 地域mからnへの移住主体数： f_{mn}
  - ▶ 移住費用パラメータ： γ

動的均衡条件の導出

■ 最適値関数

● 地域mの移動主体が最適な行動を行う場合の期待総効用

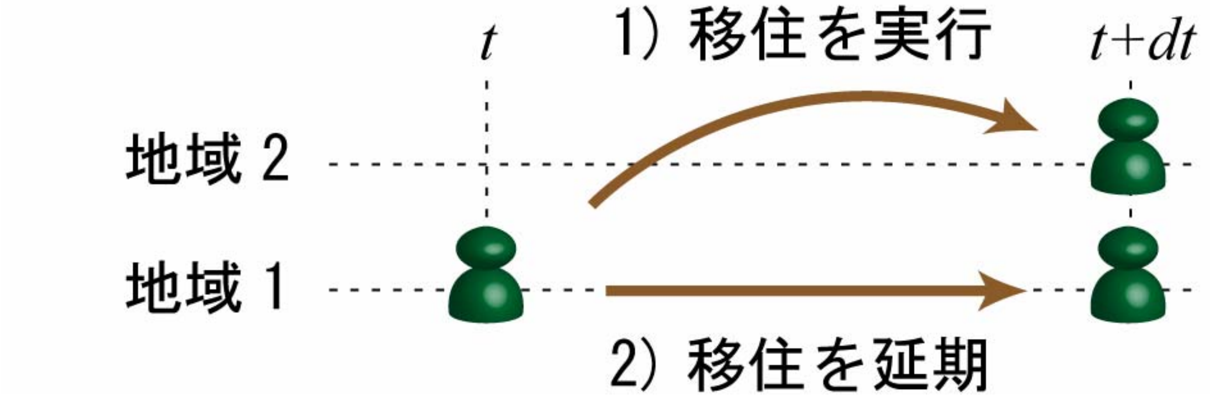
$$V_m(X,h) \equiv \max_{\{m(s)\}} . E_t\left[J(t, m(s)) \,\middle|\, X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m \right]$$

⇩ DP分解

■ 任意の時刻 t に地域mの移動主体がとる行動

1）地域mからnへ移住

2）微小時間 dt だけ地域mを選択し続ける



動的均衡条件の導出 (1)

- 移住がない場合 : $f_{mn} = 0$
  - 地域の価値mはnの純価値以上である:

$$V_m(X,h) > V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma$$

  - 移動主体全体が移住を延期する:

$$V_m(X,h) = W_m(X,h)dt + e^{-rdt}E_t\left[V_m(X+dX, h+dh)\right]$$

⇩ 伊藤の補題を用いて展開・整理する

$$L(\cdot f_{12}, f_{21})V_m(X,h) + W_m(X,h) = 0$$

where

$$L(f_{12}, f_{21}) \equiv \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma X)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial h}(f_{21} - f_{12}) - r$$:偏微分作用素

動的均衡条件の導出 (2)

- 移住がある場合 : $f_{mn} > 0$
  - 微小時間dtの間に地域mからnに移住する主体数 : $f_{mn} dt$
  - 地域間の純価値が等しくなる水準まで移住は行われる :

$$V_m(X,h) = V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma$$

  - 必ず移住を延期する主体が存在する.
    - ▶移住を延期した主体が満たすべき条件式 :

$$L(\cdot f_{12}, f_{21}) V_m(X,h) + W_m(X,h) = 0$$

where

$$L(f_{12}, f_{21}) \equiv \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma X)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial h}(f_{21} - f_{12}) - r$$: 偏微分作用素

動的均衡条件

- 動的均衡条件：状態平面(X, h)上で**毎期**成立する人口移動ダイナミクスの均衡条件

$$
\begin{cases}
V_m(X,h) > V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma & \text{if} \quad f_{mn}(X,h) = 0 \quad \text{（移住なし）} \\
V_m(X,h) = V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma & \text{if} \quad f_{mn}(X,h) > 0 \quad \text{（移住あり）}
\end{cases}
$$

subject to

$$
\mu X \frac{\partial V_m}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma X)^2 \frac{\partial^2 V_m}{\partial X^2} + \frac{\partial V_m}{\partial h}(f_{21} - f_{12}) - rV_m + W_m = 0
$$

偏微分方程式制約付き非線形相補性問題

[P-NCP] **Find** $\{f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)\} \in \Omega \quad (m, n = 1,2; m \neq n)$ **such that**

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot)\cdot\{V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma\} = 0 \\ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma \geq 0,\ f_{mn}(\cdot) \geq 0 \end{cases}$$

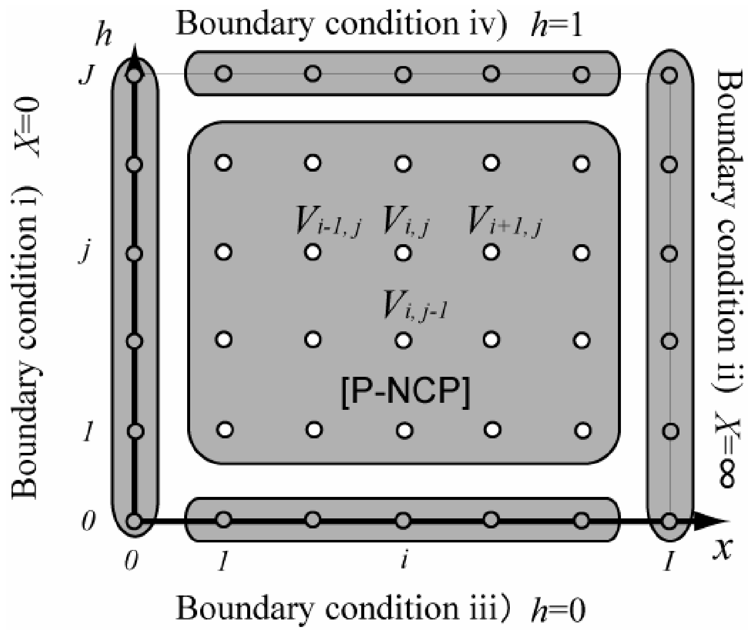
$$\Omega = \left\{ (f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)) \,\middle|\, L_m(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \right\}$$

$(\cdot) = (X, h)$

$\forall X \in [0, \infty)$

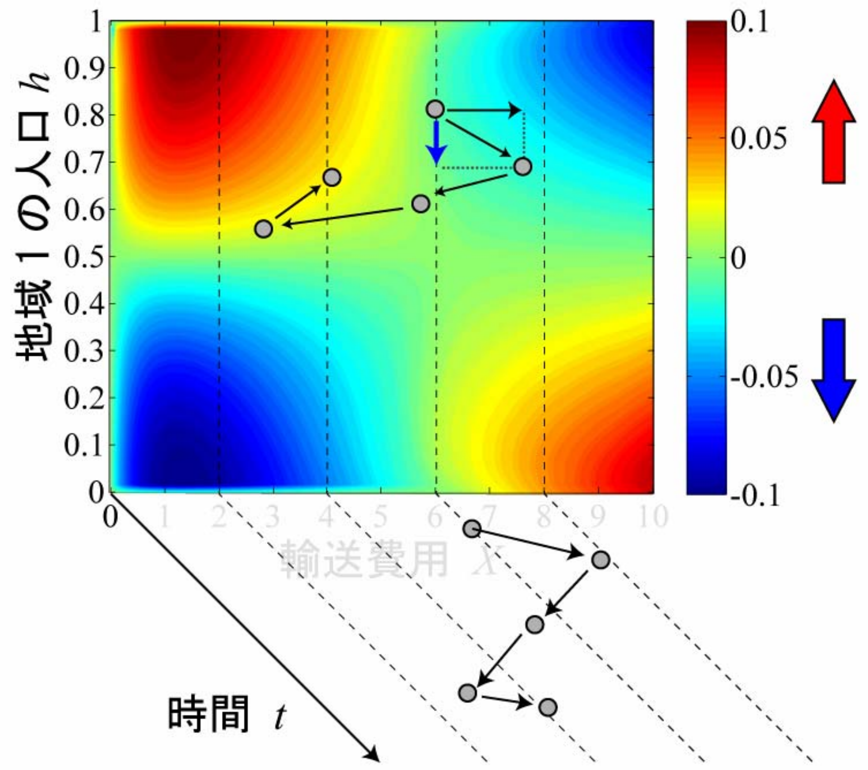
$\forall h \in [0,1]$

境界条件



Core-Periphery均衡ダイナミクス

- <u>命題.</u> *経済環境に不確実性が存在する下での完全予見ダイナミクスでは，状態平面上の任意の状態* (X, h) *に対して人口移動の均衡フロー* $f_{mn}(X, h)$ *が一意に決定される.*



輸送費用Xのサンプルパスに応じて均衡経路が一意に決まる

確定論的CPダイナミクスとの関係

■ 輸送費用が一定のケース: $\mu = 0, \sigma = 0$

$$\begin{cases} V_m(X,h) > V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma & \text{if} \quad f_{mn}(X,h) = 0 \\ V_m(X,h) = V_n(X,h) - f_{mn}(X,h)/\gamma & \text{if} \quad f_{mn}(X,h) > 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\boxed{\mu X \frac{\partial V_m}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma X)^2 \frac{\partial^2 V_m}{\partial X^2}}}_{=0} + \frac{\partial V_m}{\partial h}(f_{21} - f_{12}) - rV_m + W_m = 0$$

整理すると

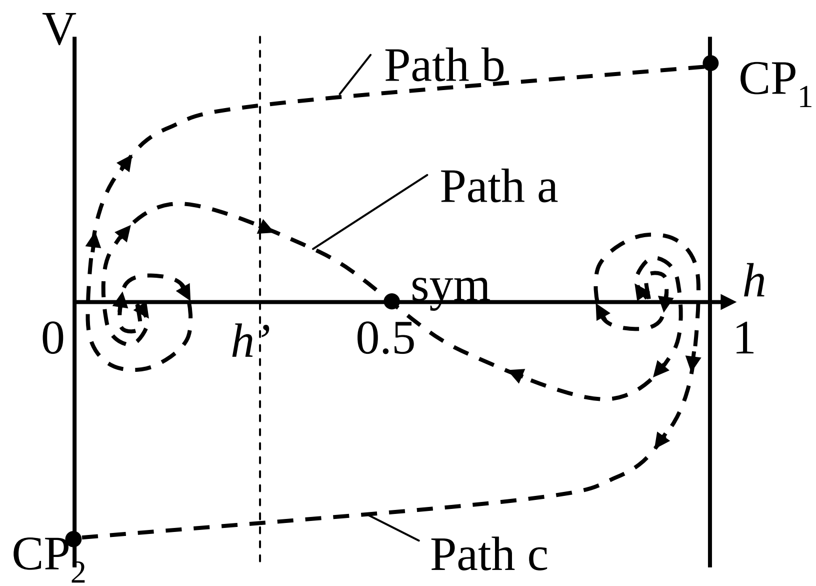
$$\begin{cases} \Delta\dot{V}(t) = r\Delta V(t) - \Delta W(t) \\ \dot{h}(t) = \gamma\Delta V(t) \end{cases}$$

where $\Delta V(t) = V_1(t) - V_2(t) \quad \Delta W(t) = W_1(t) - W_2(t)$

予見的動学モデル（Krugman[1991b]・Ottabiano[2001]etc.）と一致

均衡選択原理に関する考察 (1)

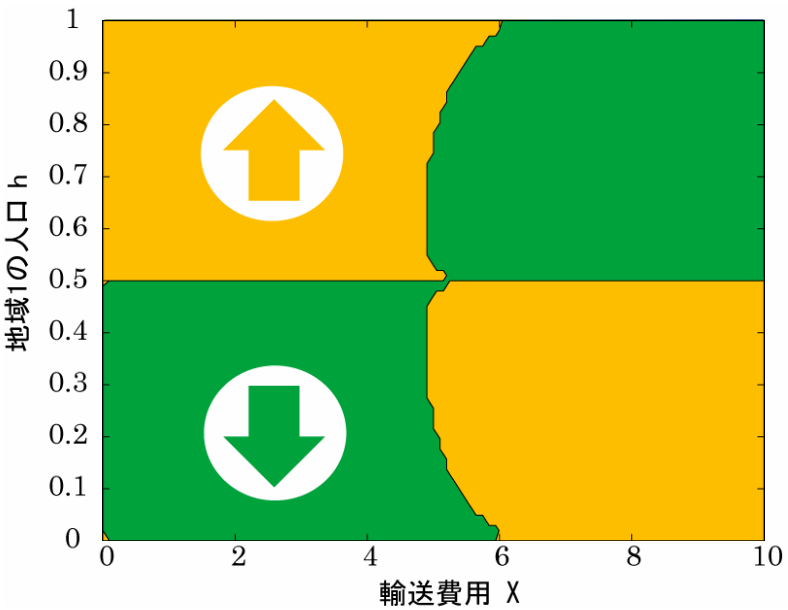
- 確定論的なダイナミクス Ottaviano(2001),Baldwin(2001)
  - “一定時間後に停留点に収束する”という終端条件(Krugman(1991b),Fukao&Benabou(1993)から導き出された解を“*Expectation*” を用いて『解釈』している.
  - いずれの停留点が選択されるかは，モデルにおいて内生的には決定されない.



均衡選択原理に関する考察 (2)

確率論的なダイナミクス（提案モデル）

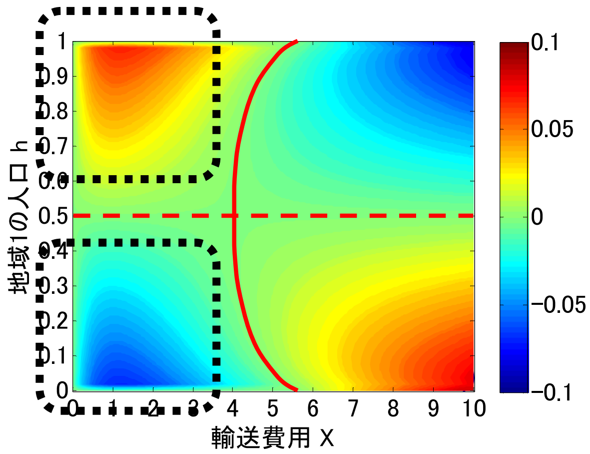
- 長期的に安定な停留点が存在しない無限計画問題
- 実現し得るあらゆるシナリオに対して確率が割り振られ，主体は各シナリオが実現した際に獲得できる総効用の期待値を計算して最適行動をする.
- 輸送費用Xのサンプルパスに応じて，均衡経路が一意に決定



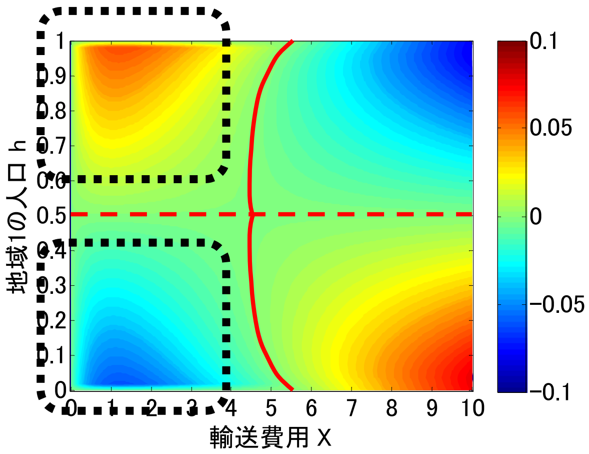
▶対称的な2地域のケースでは，KrugmanのExpectationパスのような“跳び越え”は起こらない！

不確実性の度合いとCPダイナミクス

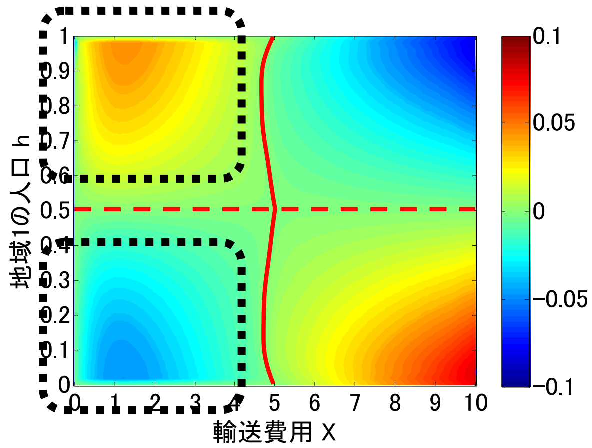
- σに対するdh/dtの感度　（$dh/dt = f_{21} - f_{12}$）
  - σが減少すると，フロー・パターンが連続的に変化．
  - σが増加すると，輸送費用が小さい範囲でフローdh/dtの絶対値が減少する．（輸送費用が小さい範囲では，σの増加は，輸送費用が高騰するリスクとして作用し，集積の経済を弱めるため）



$\sigma = 1.0 \times 10^{-4}$



$\sigma = 0.20$



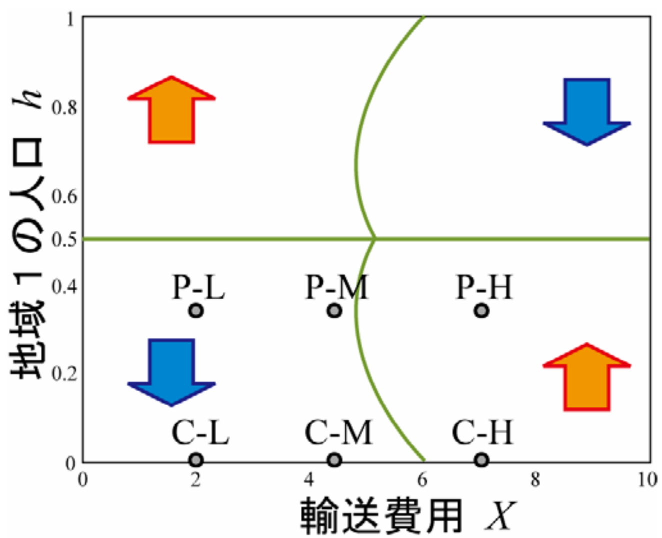
$\sigma = 0.40$

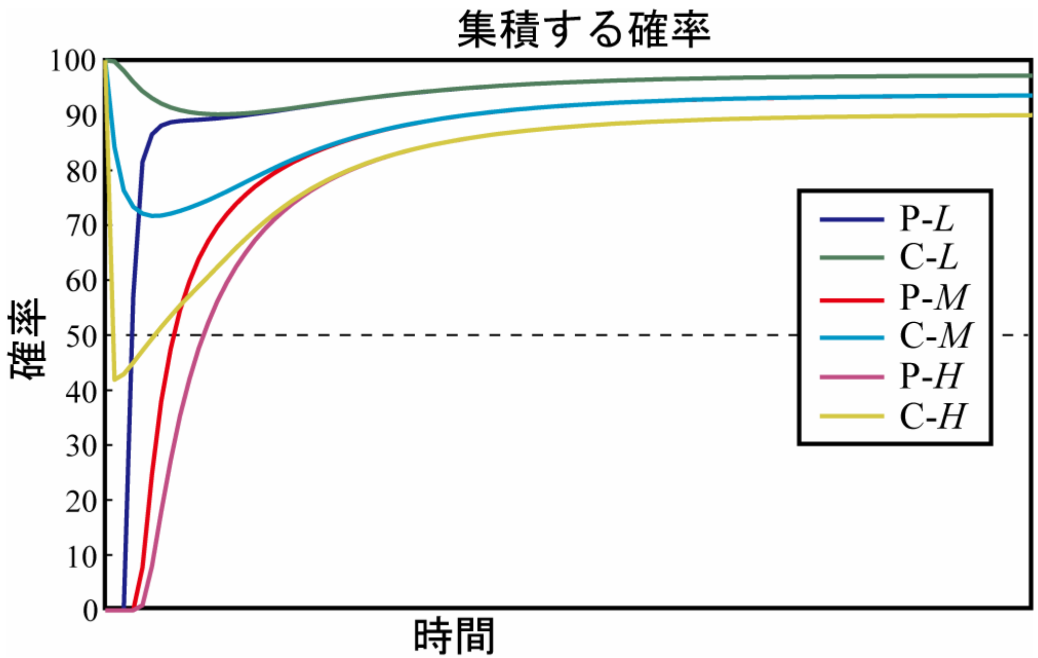
超長期的な集積・分散パターン(1)

均衡確率解分布：経済が（短期的な）停留点にいる確率

- 性質1.　*均衡解確率分布の定常状態が存在する.*

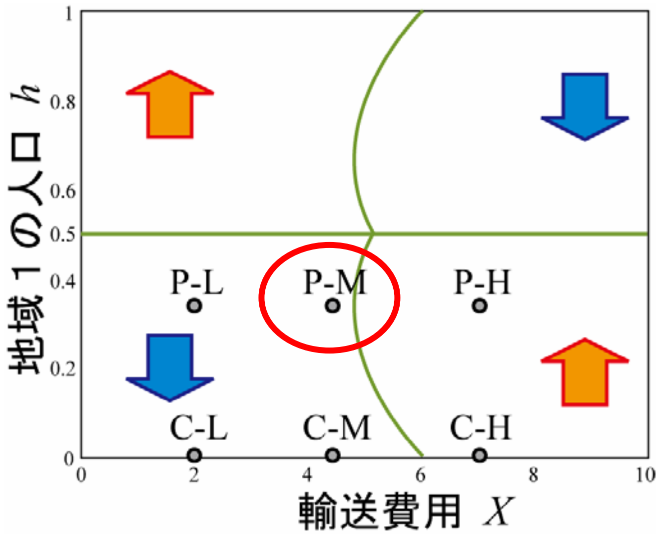
- 性質2.　*均衡解確率分布の定常状態は，地域1の人口hの初期値に依存せず，輸送費用Xの初期値にのみ依存する.*



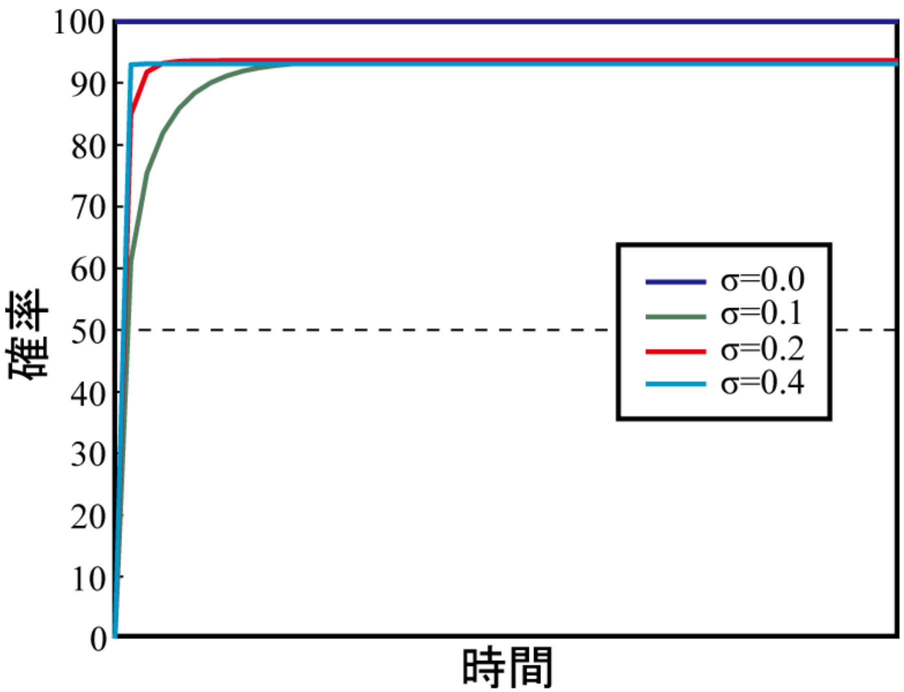


超長期的な集積・分散パターン(2)

- 性質3. *均衡解確率分布の定常状態は，不確実性の度合い（ボラティリティの大きさ）に依存しない．*



地域2に集積する確率(h=0)



まとめ

- 経済環境の不確実性を考慮した長期人口移動ダイナミクスのモデルを構築
  - 確率的なパラメータのサンプルパスに応じて均衡経路が一意に決定される.
  - “*Expectation*”に基づく均衡選択原理はロバストでない!

- 超長期的な集積・分散パターンの性質
  - 均衡解確率分布の定常状態が存在する.
  - 均衡解確率分布の定常状態は，初期立地状態に依存せず，輸送費用の初期値にのみ依存する.
  - 均衡解確率分布の定常状態は，不確実性の度合い（ボラティリティの大きさ）に依存しない.

参考文献 (1)

- M. Fujita, P. Krugman, A. Venables, “The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade,” The MIT Press, 1999.
- P. Krugman, “Increasing Return and Economic Geography,” Journal of Political Economy 99, pp.483-499, 1991a.
- P. Krugman, “History versus Expectations,” The Quarterly Journal of Economics 106, pp.651-667, 1991b.
- R. Forslid, G.I.P. Ottaviano, “An Analyticaly Solvable Core-Periphery Model,” Journal of Economic Geography 3, pp.229-240, 2003.

Appendix.

動的均衡状態の分析

割引率が非常に大きいケース：$r \to \infty$

- 地域の価値V_mは，当該期から得られる間接効用フローW_mに等しくなる．

$$V_m(t,X,h) = \max\left[W_m(t,X,h), W_n(t,X,h) - \frac{f_{mn}(t,X,h)}{\gamma} \right]$$

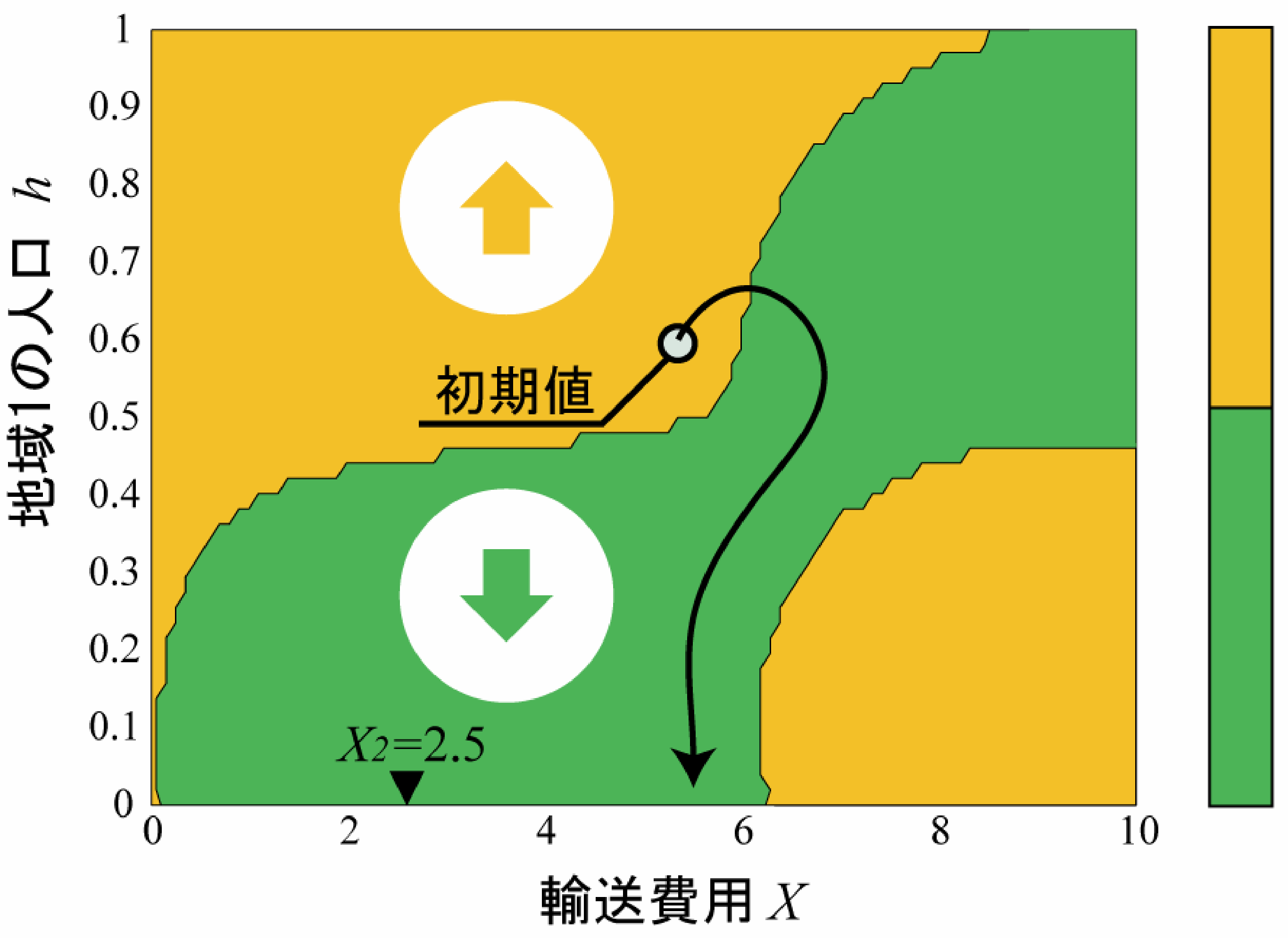
整理すると

$$\frac{\dot{h}}{\gamma} = \begin{cases} W_1(\cdot) - W_2(\cdot) & \text{if} \quad 0 < \mathrm{h} < 1 \\ \min.\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if} \quad \mathrm{h} = 1 \\ \max.\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if} \quad h = 0 \end{cases}$$

近視眼ダイナミクス（Krugman[1991b]）と一致

“History versus Expectations”？

非対称な2地域のケース



付録：状態確率分布の導出

- 状態確率分布
  - (h-X)状態空間の任意の状態が実現する確率
  - 制御ルール（移住主体数）から導出
- 輸送費用Xに対する確率分布の変化
  - Fokker-Plank方程式に従う

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[(\sigma X)^2 p(X,h)\right] - \frac{\partial}{\partial X}\left[\mu p(X,h)X\right]$$

p：確率密度関数　μ：ドリフト　σ：ボラティリティー

- 地域1の人口hに対する確率分布の変化
  - 制御ルール（移住主体数）に従って変化する.