

集積経済下における 地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス

織田澤 利守¹・赤松 隆²

¹正会員 博（工） 東北大学大学院情報科学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06）

E-mail:ota@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 博（工） 東北大学大学院情報科学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06）

E-mail:akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みでの完全予見的 (perfect-foresight dynamics) ダイナミクスを導入した新しい均衡選択原理を提案する。具体的には、経済環境に不確実性（確率動的なゆらぎ）が存在する下で、将来起こりうるすべて状況を確率的に織り込んだ労働者の地域間移住に関する意思決定モデルの定式化を行う。その結果、人口移動ダイナミクスの均衡経路が確率的に実現するサンプルパスに応じて一意に決定されることを明らかにする。さらに、Krugman [1991b] における解の不定性が確定論的な枠組みのみで必要となる仮定に依存した結果であることに言及し、確率論的な枠組みへと拡張した提案モデルに基づく均衡選択原理が頑健的であることを示す。

Key Words : Core-Periphery model, Multiple equilibria, Perfect-foresight dynamics, Economic uncertainty

1. はじめに

Krugman [1991a] の Core-Periphery モデル（以下、CP モデル）は、労働力（生産要素）の地域間移動、及び、それに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論的に扱った先駆的研究である。CP モデルでは、集積の外部性に起因して複数の均衡解が存在しうることが示されたが、どのような要因によっていずれの均衡解が実現するか（均衡選択問題）については詳しく分析されていない。複数均衡が存在する経済において、どの均衡解が実際に生じるのかを予測することは政策立案上の重要な課題である。こうした均衡選択問題を扱うためには、どのような経路で均衡解が実現するかを記述するダイナミクスに関する分析が必要となる。

複数均衡下の経済における均衡選択に関しては、マクロ経済学や貿易理論、産業組織論の各分野に研究蓄積がある (e.g. Howitt and McAfee[1988], Murphy, Shleifer and Vishny [1989], Either[1982])。そこでは、*history* と *expectation* に基づく異なる 2 つの均衡選択原理が提案されてきた。前者は、初期状態値のみによって実現する均衡が特定されること (“*history matters*”) であり、後者は、予見的 (forward-looking) な主体（企業や消費者）の自己実現的な期待のみによって均衡が決定されること (“*expectation matters*”) である。Matsuyama[1991] は、工業部門と農業部門の 2 セクターで構成される経

済において、工業部門の収穫逓増性をもたらす複数均衡問題を対象に分析を行った。その結果、局所的安定均衡に陥った経済が完全予見的な主体の *expectation* によって大域的安定均衡へ到達可能であることが明らかになり、均衡選択における *expectation* の重要性を示した。Krugman [1991b] は、Matsuyama[1991] とは異なるダイナミクスを想定し、各均衡選択原理が有効となる条件を示した。なお、Matsuyama[1991] では、労働者は与えられたある一時点においてのみ就労部門を選択できるのに対して、Krugman [1991b] では、労働者が就労部門を変更するタイミングを選択でき、その結果、変更タイミングに関する均衡状態が成立するようなダイナミクス（以降、Krugman 型ダイナミクスと呼ぶ）を想定している。しかし、Matsuyama[1991] や Krugman [1991b] の想定する確定論的な枠組みでは、*expectation* に応じて複数の均衡経路が存在するため、均衡解を理論的に全く特定できないという問題（解の不定性）が存在する。

Krugman [1991a] 以降、都市における経済活動の集積現象を説明する研究が膨大に蓄積されてきたが、均衡選択問題を明示的に扱った研究は少ない。Fujita et.al. [1999] は、近視眼的な労働者を仮定し、各時点においてより大きな瞬間効用をもたらす地域へと移住が進むような複製ダイナミクス (replicator dynamics) を分析している。その結果、初期状態値のみによって実現する均衡解が決定される。これに対し、Ottaviano [2001]、

Baldwin [2001]は、Krugman [1991b]の考え方をCPモデルに応用し、確定論的な枠組みにおいて労働者が将来にわたって獲得する総効用に基づき移住地域を選択する予見的ダイナミクス (forward-looking dynamics) を分析している。その結果、均衡選択に関しては、初期状態のみによって特定の均衡解が決定されるか、または、解は不定であるというKrugman [1991b]と同様な非常に極端な結論しか得られていない。昨今、ゲーム理論分野の抽象研究において、不確実性の導入により均衡選択問題における解の不定性が解消される可能性が示されている。Frankel and Pauzner[2000]は、Matsuyama[1991]を拡張し、不確実性の導入により(長期的な)均衡解に向かう経路がパラメータのサンプルパスに応じて一意に決定することを明らかにし、自己実現的期待がロバストとはいえないことを示した。しかし、極めて単純化されたダイナミクスを想定しているため、都市集積のダイナミクスを扱うのに十分とは言えない。

本研究では、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みでの予見的(perfect-foresight dynamics)ダイナミクスを導入した新しい均衡選択原理を提案する。具体的には、Krugman型ダイナミクスを想定し、経済環境に不確実性(確率動的なゆらぎ)が存在する下で、将来起こりうるすべて状況を確率的に織り込んだ労働者の地域間移住に関する意思決定モデルの定式化を行う。その結果、人口移動ダイナミクスの均衡経路が確率的に実現するサンプルパスに応じて一意に決定されることを明らかにする。さらに、Krugman [1991b]における解の不定性が確定論的な枠組みのみで必要となる仮定に依存した結果であることに言及し、確率論的な枠組みへと拡張した提案モデルに基づく均衡選択原理が頑健的であることを示す。

本論文の構成は、以下のとおりである。2.ではCPモデルにおける短期均衡の定式化を行い、その性質について述べる。3.では、経済環境の不確実性を考慮した人口移動ダイナミクスの定式化を行い、標準形の相補性問題に帰着することを示す。4.では、提案モデルと従来の確定論的モデルとの対応関係を示す。5.では結論を述べる。

2. CPモデルにおける短期均衡

(1) モデルの仮定

本研究での短期均衡の分析においては、CPモデルを扱いやすくしたForslid and Ottaviano[2003]の定式化を採用する。このモデルは、労働者の間接効用を地域間の人口配分の関数として陽的に表現できるという特徴がある。経済は対称的な2地域 ($m, n = 1, 2; m \neq n$)

から構成される。この経済には、高技能労働 (skilled) と低技能労働 (unskilled) という2つのタイプの生産要素が存在し、全ての労働者は自らのタイプにあった1単位の労働を非弾力的に供給するものとする。経済全体における skilled, unskilled の労働者数をそれぞれ $H = H_1 + H_2, L = L_1 + L_2$ で表す。ただし、 $H_m (L_m)$ は、地域 m における skilled (unskilled) の労働者数である。skilled の労働者は地域間を自由に移動可能であると仮定する。その結果、地域 m における skilled の労働者数は内生変数であり、時間の経過に伴って変化する。一方、unskilled の労働者は地域間を移動不可能であり、 L_m は固定とする。また、この経済には、農業部門 A (以下、部門 A) と工業部門 M (以下、部門 M) の2部門があるとする。農業部門 A を定義する特徴は、収穫不変の技術により、unskilled を生産要素として1種類の同質な財を生産する完全競争的な部門ということであり、工業部門 M は、収穫逓増の技術により、skilled 及び unskilled を生産要素として、広範囲の差別化された財を生産する独占競争的な部門である(したがって、「農業」、「工業」という言葉は必ずしも文字通りに解釈する必要はない)。各部門の生産物を M 財、A 財と呼ぶ。M 財の輸送費用は、氷塊費用の形をとるものと仮定する。すなわち、1単位の財が一方の地域からもう一方の地域へ輸送されると、当初の1単位のうち一部は途中で融けてしまい $1/\tau$ だけが実際に到達する。定数 τ は、1単位の財が到着するために必要な発送量である。これに対し、A 財の輸送には費用がかからないものと仮定する。

(2) 消費者の行動

地域 m における全ての消費者は、2種類の財に対して同じコブ・ダグラス型の効用関数²⁾：

$$U_m = M_m^\lambda A_m^{1-\lambda} \quad (1)$$

で表される選好を持つ。ただし、 M_m は以下で定義する工業品の消費を表す指数、 A_m は農業品の消費を表す。また、 $\lambda \in (0, 1)$ は工業品への支出割合を表す定数である。数量指数 M_m は、財どうしの差別化が連続的に変化する財空間で定義される部分効用関数を表す。差別化に対応するインデックスを連続変数 s として、 $d_m(s)$ を多様な各 M 財の消費量とする。また、 N は利用可能な財の種類を表すが、 N_m を地域 m における M 財の種類とすると、 $N_1 + N_2 = N$ となる。ここで、 M_m は CES 関数

$$M_m = \left[\int_{s \in N} d_m(s)^{(\xi-1)/\xi} \right]^{\xi/(\xi-1)} \quad (2)$$

によって定義されると仮定する。この特定化で、パラメータ ξ は任意の差別化された2財間の代替の弾力性を表す。

地域 m において、所得 Y_m ならびに A 財の価格 p_m^A および地域 n で生産され地域 m で消費される各 M 財の価格 $p_{nm}(s)$ を所与とすれば、(代表的) 消費者の問題は、予算制約：

$$\int_{s \in N_m} p_{mm}(s) d_{mm}(s) ds + \int_{s \in N_n} p_{nm}(s) d_{nm}(s) ds + p_m^A A_m = Y_m \quad (3)$$

のもとで効用関数 (1) を最大にすることである。ただし、 d_{nm} は、地域 n で生産され地域 m で消費される各財の消費量を表す。したがって、代表的消費者の行動は、以下のように書き表すことができる。

$$\max U_m = M_m^\lambda A_m^{1-\lambda} \quad \text{s.t.} (3) \quad (4)$$

これにより、以下のような需要関数を得る。A 財については、

$$A_m = \frac{(1-\lambda)Y_m}{p_m^A} \quad (5)$$

差別化インデックス $s \in N$ の M 財については、

$$d_{nm}(s) = \frac{p_{nm}(s)^{-\xi}}{P_m^{1-\xi}} \lambda Y_m \quad (6)$$

である。ここで、 P_m は地域 m の価格指数：

$$P_m = \left[\int_{s \in N_m} p_{mm}(s)^{1-\xi} ds + \int_{s \in N_n} p_{nm}(s)^{1-\xi} ds \right]^{1/(1-\xi)} \quad (7)$$

を表す。したがって、地域 m における skilled 労働者の間接効用関数は、

$$W_m \lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda} w_m P_m^{-\lambda} (p_m^A)^{-(1-\lambda)} \quad (8)$$

と表される。

(3) 生産者行動と独占的競争

部門 A では、unskilled のみを生産要素とし、同質な財 A を完全競争のもとで、収穫不変の技術により生産するものと仮定する。一般性を失うことなく、1 単位の unskilled により、1 単位の財が生産されると基準化できる。したがって、完全競争下では、A 財の価格は、unskilled の賃金に等しくなる：

$$p_m^A = w_m^L \quad (9)$$

A 財の地域間輸送には費用がかからないため、その価格はどちらの地域でも等しい： $p_1^A = p_2^A$ 。従って、 $p_m^A = w_m^L$ より $w_1^L = w_2^L$ という関係も明らかである。以下、単純化のため、A 財をニューメーラールとし、 $p_m^A = w_m^L = 1$ とする。なお、unskilled の労働者は地域間を移動することが不可能である。ここではモデルを単純化するため、農業労働者 L は 2 地域に均等に分布しているという仮定をおき、 $L_m = L/2$ とする。

部門 M では、差別化された M 財を独占的競争のもとで、収穫増進の技術により生産するものと仮定する。ただし、M 財を $x_m(s)$ 単位生産する場合、 α 単位の skilled

と、 β 単位の unskilled が生産要素として必要となる。従って、地域 m の部門 M における 1 企業の総生産費用は

$$TC_m(s) = w_m \alpha + \beta x_m(s) \quad (10)$$

で表される。

規模の経済、消費者の多様性の選好、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、部門 M においては、どの企業も別の企業が供給する財と同じ種類の財を生産しようとはしない。このことは、各種類の財が唯一の特化した企業により、唯一の地域において生産されることを意味する。従って、部門 M においては、生産を行う企業数は供給される財の種類に等しい。したがって、地域 m に存在する部門 M の企業数 N_m は、以下のようになる。

$$N_m = \frac{H_m}{\alpha} \quad (11)$$

次に、部門 M における企業の利潤最大化行動について考える。この企業は、地域 m において、所与の賃金 w_m に直面しつつ、ある特定の種類の財を生産する。企業の利潤関数は、次のように表される。

$$\Pi_m(s) = p_{mm}(s) d_{mm}(s) + p_{mn}(s) d_{mn}(s) - TC_m(s) \quad (12)$$

短期均衡において成立する M 財の市場清算条件は、以下のように示される。

$$x_m(s) = d_{mm}(s) + \tau d_{mn}(s) \quad (13)$$

式 (10) を用いて、企業の利潤関数 (12) は次のように書き換えられる。

$$\Pi_m(s) = p_{mm}(s) d_{mm}(s) + p_{mn}(s) d_{mn}(s) - \beta (d_{mm}(s) + \tau d_{mn}(s)) - w_m \alpha \quad (14)$$

短期均衡下での利潤最大化の一階条件より、M 財の価格：

$$p_{mm}(s) = \frac{\beta \xi}{\xi - 1}, \quad p_{mn}(s) = \frac{\tau \beta \xi}{\xi - 1} \quad (15)$$

が求められる。式 (15) を用いて、CES 価格指数 (7) は以下のように単純化される：

$$P_m = \frac{\beta \xi}{\xi - 1} [N_m + \phi N_n]^{1/(1-\xi)} \quad (16)$$

ここで、 $\phi \equiv \tau^{1-\xi} \in (0, 1]$ は、自地域内で生産される財の需要に対する輸入財の需要の比率であり、貿易の自由度を表す。輸送費用 τ が大きい (小さい) とき、 ϕ は小さい (大きい) 値をとる。式 (6), (13), (15), (16) より、部門 M における企業の生産量を表す以下の式が導かれる：

$$x_m = \frac{\xi - 1}{\beta \xi} \left[\frac{\lambda Y_m}{N_m + \phi N_n} + \frac{\phi \lambda Y_n}{\phi N_m + N_n} \right] \quad (17)$$

(4) 短期均衡における実質賃金

企業は費用を要せず参入・撤退が可能であるため、均衡状態では利潤が発生しない。式従って、式 (12), (15)

より, skilled の賃金 w_m が, 部門 M における 1 企業の生産量 x_m の関数として導かれる:

$$w_m = \frac{\beta x_m(s)}{\alpha(\xi - 1)} \quad (18)$$

さらに, 式(11), (16), (17)より, 次式を得る.

$$w_m = \frac{\lambda}{\xi} \left[\frac{Y_m}{H_m + \phi H_n} + \frac{\phi Y_n}{\phi H_m + H_n} \right] \quad (19)$$

また, 短期均衡での地域 m の所得 Y_m は skilled の所得 w_m と unskilled の所得 w_m^L から構成される:

$$\begin{aligned} Y_m &= w_m H_m + w_m^L L_m \\ &= w_m H_m + \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

以上のシステムから, skilled 労働者の総数 H のうち地域 m に居住する比率 $h \equiv H_m/H$ を与件とすれば, 地域 m の部門 M の企業数 N_m , 企業の生産量 x_m , 価格指数 P_m , 均衡賃金 w_m , 所得 Y_m が決定される. 式(20)を式(19)に代入すると, w_m に関する 2 つの線形方程式が導かれる. これを解くと, 均衡賃金 w_m が h の陽関数として, 以下のように導かれる:

$$w_1 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi h + B(\phi) \cdot (1-h)}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (21)$$

$$w_2 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi \cdot (1-h) + B(\phi)h}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (22)$$

ただし, $A \equiv (\lambda/\xi)/\{1 - (\lambda/\xi)\}$, $B(\phi) \equiv 1 - (\lambda/\xi) + \{1 + (\lambda/\xi)\}\phi^2$ と置く. ここで, 間接効用関数(8)に, 式(Pindex2), (21), および(22)を代入すると, 間接効用関数が h の陽関数として導かれる.

$$W_m(h) = \eta \frac{w_m(h)}{P_m(h)^\lambda} \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

$$\eta \equiv \lambda^\lambda (1-\lambda)^{(1-\lambda)} \quad (24)$$

$$P_1(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\xi}} [h + \phi(1-h)]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (25)$$

$$P_2(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\xi}} [(1-h) + \phi h]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (26)$$

なお, 3章以降の分析では経済全体の skilled 労働者数を $H = 1$ と基準化する.

(5) 短期均衡解の性質

図-1(a)-(c)は, skilled 労働者のうち地域 1 に居住する比率 h と間接効用フローの地域格差 $W_1 - W_2$ の関係を示している. 図-1(a)は輸送費用が高い場合を, 図-1(b)は低い場合を, 図-1(c)は中間的な場合を表している. 輸送費用が高い場合, $h = 1/2$ のとき間接効用の差がゼロとなり, $h < 1/2$ ならば正, $h > 1/2$ ならば負である. したがって, 一方の地域に skilled 労働者の過半数が存在すると, skilled 労働者にとってその地域より他方の地域のほうが魅力的となる. このことから, skilled 労働者が 2 地域間に均等的に存在する対称均衡が唯一の均衡解であり, 安定的であることがわかる. 一

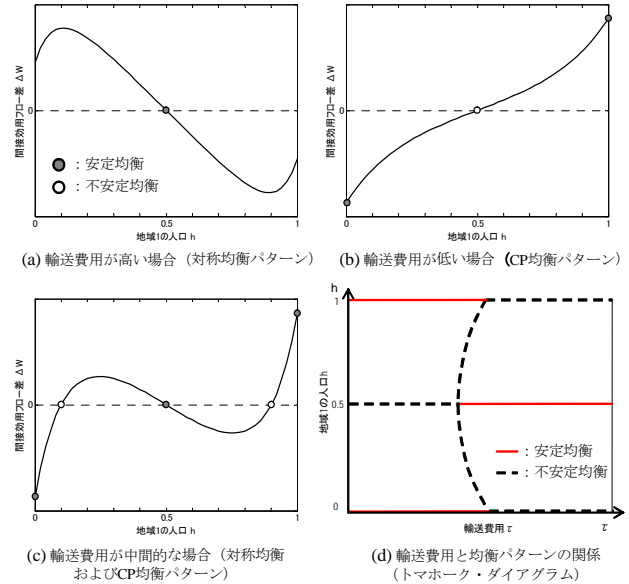


図-1 短期均衡解の性質

方, 輸送費用が低い場合, 間接効用の差が に関して右 上がりの曲線を描く. すなわち, いずれかの地域において skilled 労働者の比率が $1/2$ を超えて大きくなるほど, 当該地域はより一層魅力的となる. そのため, すべての skilled 労働者がいずれかの地域のみ集中する Core-Periphery 均衡パターンが安定的となり, 対称均衡は不安定となる. 輸送費用が中間的な場合は, 3 つの安定均衡 (対称均衡パターンと CP 均衡パターン) と 2 つの不安定均衡が存在する. すなわち, 輸送費用が低い場合, および中間的な場合に, 複数均衡が存在している.

均衡パターンが輸送費用によってどのように変化するかを図-1(d)に示す. 赤の実線は安定均衡を示し, 破線は不安定均衡を示している. 図-1(c)に示したとおり, 輸送費用が中間的な値の場合には対称均衡パターンと CP 均衡パターンがともに安定的な均衡パターンとなる. 対称均衡が不安定となって 2 地域間の対称性が失われる点はブレークポイント, CP 均衡パターンが安定均衡として維持される限界の点はサステインポイントと呼ばれ, 2 点に挟まれた領域はオーバーラップと呼ばれる.

3. 不確実性下における長期的な人口移動ダイナミクス

(1) 状況設定

本章では, 経済環境に不確実性が存在する下での人口移動ダイナミクスの定式化を行う. いま, 時刻 $t \in [0, \infty)$ における輸送費用を $\tau(t) \equiv X(t) + 1$ と定義しよう. その上で, $x(t)$ が以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定

する：

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dx, \quad X(0) = X_0 \quad (27)$$

ここで、 μ はドリフト、 σ はボラティリティ、 dz は標準 Wiener 過程の増分である。 $X(t) > 0$ より、 $\tau(t) > 1$ が成立する。すなわち、本研究では、経済環境に内在する不確実性として輸送費用が時々刻々と変化する状況を想定している。なお、輸送費用に不確実性が介在するという仮定は、ここでの議論の本質ではない。経済システム全体に影響を持つその他のパラメータに不確実性を導入しても、以下と同様の議論を行うことができる。

CPモデルにおける人口移動ダイナミクスは、skilled労働者の長期的な効用最大化行動に基づく地域間の移住によって生じる。なお、移住は任意の移動期間 $[0, T]$ ($T \in [0, \infty)$) で行われるものとする。skilled労働者は、期間 $[0, T]$ 中に発生する総効用フローの現在正味価値の期待値を最大化するように、時刻 t での居住地域 $m(t) \in \{1, 2\}$ を決定する。時刻 t において地域 m に居住する skilled労働者にもたらされる単位時間当たりの間接効用フローは、輸送費用 X と地域1の skilled労働者数 h の関数 $W_m(X, h)$ で表される。ここで、間接効用フローは、 X の関数であるため、それ自身が確率過程である。一方、地域間の移住には費用

$$C_m(t) = \frac{f_{mn}(t)}{\gamma} \quad (28)$$

を要する。ここで、 $f_{mn}(t) (\geq 0)$ は地域 m から n へ移住フローを表し、 γ は移住費用のパラメータである。すなわち、移住には混雑現象を伴い、その時点で同時に移住を行うフロー f_{mn} が大きいほど、移住費用 $C_m(t)$ が大きくなる。時刻 t における経済全体の移住の純フロー $dh(t)$ は、

$$dh(t) = \{f_{21}(t) - f_{12}(t)\}dt \quad (29)$$

と表される。従って、時刻 t に地域 $m(t)$ に居住している状況下で、期間 $[t, T]$ に発生する総効用フローの、時刻 t での現在正味価値は、以下の式で表される：

$$J(t, m(\cdot)) \equiv \int_t^T W_{m(s)}(X(s), h(s))e^{-r(s-t)} ds - \sum_{k \in K(t)} e^{-r(\theta_k - t)} C_{m(\theta_k)}(\theta_k) \quad (30)$$

ただし、 r は割引率、 θ_k は k 回目に行われた移住の時刻を表す。また、 $K(t)$ は時刻 t 以後に行われる移住のインデックス集合を表す。式 (30) において、第1項は対象期間中の総正味効用を、第2項は移住に必要とされる費用を表す。

(2) 每期成立すべき均衡条件

ここでは、各瞬間における人口移動のダイナミクスが満たす均衡条件を示す。まず、時刻 t において輸送費

用 $X(t) = X$ 、地域1の人口 $h(t) = h$ が観測された状況を (t, X, h) と表す。地域 m にいる skilled労働者が状況 (t, X, h) において、以後最適に行動した場合に得られる総効用フローの現在正味価値の期待値 $V_m(t, X, h)$ を最適値関数として以下のように定義する。

$$V_m(t, X, h) \equiv \max_{\{m(s) | s \in [0, T]\}} E_t [J(t, m(\cdot)) | X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m] \quad (31)$$

ただし、 n は式 (30) で定義される $[0, T]$ 間に得られる総効用フローの現在正味価値である。以下では、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において定義される最適値関数 $V_m(\cdot)$ を、“地域 m の価値”と呼ぶ。式 (32) は期待値のネストを用いて、以下のように記述できる。

$$V_m(t, X, h) = E_t \left[\int_t^{\theta_m} W_m(X(s), h(s))e^{-r(s-t)} ds + \left\{ V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m)) - C_m(\theta_m) \right\} e^{-r(\theta_m - t)} \middle| X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m \right] \quad (32)$$

ただし、 θ_m は地域 m から地域 n への移住が行われる時刻である。また、 $V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ は、状況 $(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ で地域 n が居住地として選択されているときの最適値関数を表す。式 (32) で表される最適値関数 $V_m(t, X, h)$ は、状況 (t, X, h) で地域 m を選択している skilled労働者が時刻 t にとる行動は、**a)** 地域 m から n に移住するか、**b)** 微小時間 dt だけ地域 m を選択し続ける、のいずれかを離散的に選択する問題と表すことができる。このとき、均衡人口移動フローは状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ に依存し、 $f_{mn}(\cdot)$ 、 $f_{nm}(\cdot)$ と表される。また、 f_{mn} 、 f_{nm} が同時に正の値をとることはないことから、

$$dh(\cdot) = \begin{cases} f_{21}(\cdot)dt & \text{if } dh(\cdot) \geq 0 \\ -f_{12}(\cdot)dt & \text{if } dh(\cdot) < 0 \end{cases} \quad (33)$$

が成立する (付録 I 参照)。従って、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において地域 m を選択している skilled労働者の行動は、以下のように場合分けすることができる。

a) 移動なし ($f_{mn}(\cdot) = 0$) の場合

$f_{mn}(\cdot) = 0$ より地域 m から n に移住する skilled労働者数は0である。従って、地域 m の価値が地域 n の純価値を上回るため、以下の不等式：

$$V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - f_{mn}(\cdot)/\gamma \quad (34)$$

が成立する。このとき、地域 m において微小時間 dt だけ移住を延期するため、最適値関数の定義より、以下の等式：

$$V_m(t, X, h) = W_m(X, h)dt + e^{-rdt} E_t \left[V_n(t + dt, X + dX, h + dh) \right] \quad (35)$$

が成立する。DP 分解、伊藤の補題³⁾を用いて式(35)の期待値演算内を展開・整理すれば、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ で成立すべき以下の等式を得る。

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (36)$$

ここで、 $\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})$ は、偏微分作用素で、以下の式：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_{12}, f_{21}) \equiv & \frac{\partial}{\partial t} + \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial h} (f_{21} - f_{12}) - r \end{aligned} \quad (37)$$

で定義される。

b) 移動あり ($f_{mn}(\cdot) > 0$) の場合

微小時間 dt の間に地域 i から j に移住する skilled 労働者数は $f_{mn}dt$ と表される。均衡においては、地域 m の価値が地域 n の純価値と等しくなる水準まで移住が行われる。すなわち、

$$V_m = V_n - \frac{f_{mn}}{\gamma} \quad (38)$$

が成立する。一方、残りの skilled 労働者は微小時間 dt だけ移住を延期することとなる。したがって、 $f_{mn} = 0$ の場合と同様に、最適値関数の定義より、等式(35)が成立する。先ほどと同様に、DP 分解、伊藤の補題を用いて式(35)の期待値演算内を展開・整理すれば、式(36)と同様の等式を得る。

以上 a), b) をまとめると、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 m に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は次のように表現される。

$$\begin{cases} V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) = 0 \\ V_m(\cdot) = V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (40)$$

同様にして、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 n に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は、

$$\begin{cases} V_n(\cdot) > V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) = 0 \\ V_n(\cdot) = V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (41)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_n(\cdot) + W_n(\cdot) = 0 \quad (42)$$

と表される。

(3) 非線形相補性問題としての表現

前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、解析的に解くことが困難なため、数値解法を用いる必要がある。以下では、この均衡条件が数理計画分野においてよく知られる非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) として記述されることを明らかにする。非線形相補性問題は、その解の一意性やアルゴリズムに関する理論解析が発展しているため、それらを活用することによって見通しの良い数値解法の開発が可能となる。前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、以

下の非線形相補性問題(43)及び偏微分方程式(44)として表現できる。

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} = 0 \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (44)$$

$$(m, n = 1, 2; n \neq m)$$

ただし、未知変数は $f_{mn}(\cdot)$ と $V_m(\cdot)$ である。これらの条件は、まとめて以下のように、無限次元の偏微分方程式制約付き相補性問題 [P-NCP] として表現できる。

[P-NCP] Find $\{f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)\} \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \Omega = & \{ (f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)) \mid \mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \\ & (\cdot) = (t, X, h), \forall X \in (0, \infty), \forall h \in [0, 1] \} \end{aligned}$$

Ω は、 (f_{mn}, V_m) 空間内で偏微分方程式制約(44)を満たす集合を表す。本モデルでは、 $T = \infty$ とし無限期間 $[0, \infty)$ に及ぶダイナミクスを考慮する。このとき、偏微分作用素(37)内の $\partial/\partial t$ の項がゼロとなり、最適値関数 V_m 及び人口移動フロー f_{mn} は、時間には依存せず、状態 (X, h) にのみ依存する形で表わすことができる。

問題 [P-NCP] を解くためには、境界条件を設定する必要がある。最適値関数の境界条件は、平面上の各境界 ($X \rightarrow 0, X \rightarrow \infty, h = 0, h = 1$) に応じて決定される。

境界条件 i) $X \rightarrow 0$

$X \rightarrow 0$, すなわち輸送費用がゼロの場合、skilled 労働者にとって地域 1, もしくは 2 に居住することは無差別となるため、将来にわたって移住は発生しない。したがって、地域 m の居住者は恒久的に $W_m(0, h) = W^0$ (一定) を得つづける。従って、 $X \rightarrow 0$ における地域 m の価値 $\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h)$ は以下のように表される：

$$\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h) = \frac{W_m^0}{r - \mu} \quad (45)$$

境界条件 ii) $X \rightarrow \infty$

$X \rightarrow \infty$, すなわち輸送費用が非常に大きい場合、直ちに対称均衡パターンへと収束し、その後、地域 m, n の居住者は恒久的に $\lim_{X \rightarrow \infty} W_m(X, 0.5) =$

$\lim_{X \rightarrow \infty} W_n(X, 0.5) = W^\infty$ (一定) を得続ける。状態 $0 \leq h < 0.5$ において、地域2の居住者は、即座に移住費用を支払い地域1へ移住する。従って、 $\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h)$ 及び $\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h)$ は以下のようになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (46)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{0.5 - h}{\gamma} \quad (47)$$

同様に、状態 $0.5 \leq h \leq 1$ において、地域1の居住者は、即座に移住費用を支払い地域2へ移住する。従って、以下のようになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{h - 0.5}{\gamma} \quad (48)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (49)$$

境界条件 iii) $h = 0$

$h = 0$ の境界では $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{21} および $V_1(X, 0)$, $V_2(X, 0)$ のみとなる。したがって、 $m = 2$, $n = 1$ の下で $h = 0$, $f_{12} = 0$ として [P-NCP] を解けばよい。

境界条件 iv) $h = 1$

$h = 1$ の境界では、 $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{12} および $V_1(X, 1)$, $V_2(X, 1)$ のみとなる。したがって、 $m = 1$, $n = 2$ の下で $h = 1$, $f_{21} = 0$ として [P-NCP] を解けばよい。

上記のように離散的な枠組みで表現された問題 ([P-NCPd] : 付録.A-II 参照) について、以下の命題が成立する。

命題 1.

経済環境に不確実性が存在する下での予見的ダイナミクス (perfect-foresight dynamics) では、状態平面上の任意の状態 に対して人口移動の均衡フロー が一意に決定される。

(証明) : 付録.III を参照。上記の命題 1. は、確率的に発生する X のサンプルパスに応じて人口移動ダイナミクスの均衡経路が一意に決定されることを表す。

4. 考察

(1) 確定的な CP 均衡選択モデルとの対応関係

本節では、提案モデルが従来の確定的な CP 均衡選択モデルを包括した、より一般的モデルであることを示す。提案モデルの特殊ケースとして、割引率が非常に大きいケース ($r \rightarrow \infty$)、輸送費用が一定であるケース ($\mu = 0, \sigma = 0$) の2ケースについて考える。

割引率が非常に大きいケース : $r \rightarrow \infty$

$r \rightarrow \infty$ の場合、式(32)で表される地域 m の価値 $V_m(\cdot)$ は、当該期に獲得される (純) 効用フローと等しくなる。したがって、地域 m の価値 $V_m(\cdot)$ は次のように表される。

$$V_m(\cdot) = \max \left[W_m(\cdot), W_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right] (\cdot) = (X, h, t) \quad (50)$$

式(50)の右辺第一項は、時刻 t に移住を行わなかった場合に得られる効用を、第二項は当該時刻に地域 m から n へと移住を行った場合に得られる純効用を表す。 $W_n(\cdot) > W_m(\cdot)$ であれば、式(50)の右辺第一項と第二項が等しくなる水準まで地域 m から n へ skilled 労働者の移住が進む。労働者の移住が行われない状態 $dh/dt = 0$ 、すなわちシステムが定常状態となるのは、 $h \in (0, 1)$ において $W_n(\cdot) = W_m(\cdot)$ が成立する場合と端点 $h = 1$ ($h = 0$) の場合は $W_1(\cdot) > W_2(\cdot)$ ($W_1(\cdot) < W_2(\cdot)$) が成立する場合のいずれかである。以上を整理すると、このケースにおける人口移動ダイナミクスは以下のように表される：

$$\frac{\dot{h}}{\gamma} = \begin{cases} W_1(\cdot) - W_2(\cdot) & \text{if } h \in (0, 1) \\ \min.\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if } h = 1 \\ \max.\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if } h = 0 \end{cases} \quad (51)$$

式(51)で表されるダイナミクスは、Ottaviano[2001]の近視眼的ダイナミクスと一致する。

輸送費用が一定であるケース : $\mu = 0, \sigma = 0$

式(32)において $\mu = 0, \sigma = 0$ とおけば、 X は定数、 h は時刻 t の関数となることから最適値関数 V_m も t のみ の関数として表される。したがって、式(36)は以下のように書き換えることができる。

$$dV_m(t)/dt = rV_m(t) - W_m(t) \quad (m = 1, 2) \quad (52)$$

さらに、 $\nu(t) = V_1(t) - V_2(t)$ とすれば、

$$\nu'(t) = r\nu(t) - \{W_1(t) - W_2(t)\} \quad (53)$$

が成立する。また、式(33), (38)より

$$h'(t) = \gamma\nu(t) \quad (54)$$

が成立する。式(53), (54)の微分方程式で表現されるシステムは、Ottaviano[2001]における確定的な予見的ダイナミクスと一致する。

(2) 確定的な CP モデルの人口移動ダイナミクス

式(53), (54)の微分方程式のシステムとして表現される確定的な予見的ダイナミクスについて考察しよう。Ottaviano[2001], Baldwin[2001] は、Fukao and Benabou[1993]に基づき、“労働者の地域間移動が必ず一定時間後にローカルに安定な停留点のいずれかに収束する”という終端条件 ($h'(t) = 0, \nu(t) = 0$ ($t \geq T$)) を

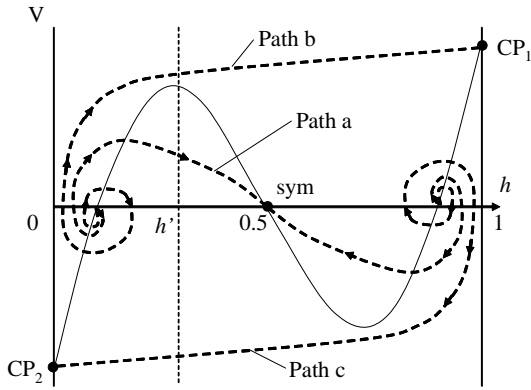


図-2 Expectationによる均衡選択

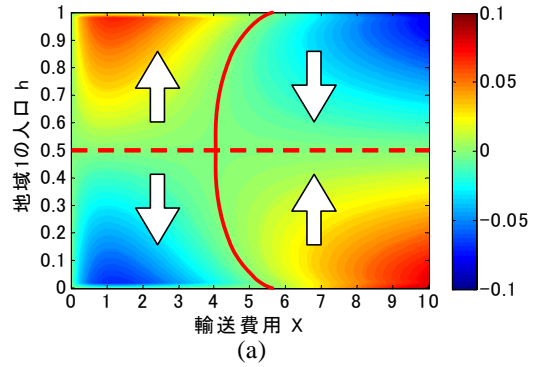
採用した上で、導出される人口移動ダイナミクスの性質について分析している。図-3は、確定論的なCPモデルにおける人口移動ダイナミクスの均衡経路を表している。ある人口分布 h' において、複数の均衡経路が同時に存在する。いずれの均衡経路が選ばれるかは、終端条件として外生的に設定される停留点に依存する。

Krugman [1991b]をはじめとする既存研究では、このようなシステムの性質を *self-fulfilling expectation* という概念を用いて解釈している。その結果、労働者の期待する均衡が自己実現的に到達されることや *expectation* の変化に伴い、ある経路から別の経路（例えば、Path aからPath bやc）へと不連続にジャンプする可能性があることを述べている。しかし、後述のように、このような議論はFukao and Benabou[1993]の終端条件が有効となる確定論的な枠組みのみで成立するものである。さらに、既存研究では、いずれの停留点を選択することが合理的な労働者にとって望ましいかについては全く検討されておらず、停留点の選択をモデルにおいて内生的に決定できないという問題がある。

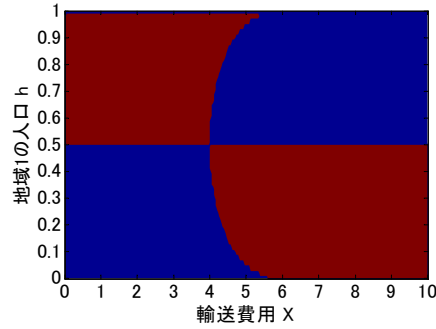
(3) 提案モデルにおける人口移動ダイナミクス

経済環境の不確実性を明示的に考慮した場合、確率的に変動する X に応じて h も変化する。仮に人口移動ダイナミクスが確定論的モデルにおける停留点に到達しても、その点が長期的に安定である保証はない。そのため、既存の確定論的モデルで採用されるFukao and Benabou[1993]の終端条件を設定することは適当ではない。

提案モデルでは、状態平面 (X, h) 上で每期成立する人口移動ダイナミクスの均衡条件より、任意の状態 (X, h) において均衡人口移動フロー $f_{mn}(X, h)$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$)が一意に決定される(命題1.)。したがって、確率的に発生する輸送費用 X のサンプルパスに応じて人口移動ダイナミクスの均衡経路を一意に特定することができる。以降では、数値解析結果を用いて、提案



(a)



(b)

(a) 図において、赤色実線は閾値曲線T、赤色破線は閾値曲線Pを表す。

図-3 輸送費用と均衡人口移動フロー

モデルにおける人口移動ダイナミクスについて述べる。

図-3(a)は、確率的に変動する輸送費用 X と時々刻々と成立する均衡状態から導かれる、状態平面 (X, h) 上の各点における人口移動フロー $dh/dt = f_{21} - f_{12}$ の関係を示す。均衡人口移動フロー dh/dt が正(負)となる状態 (X, h) は暖色(寒色)で、また色の濃淡は dh/dt の大小を表す。矢印の向きは、人口移動の方向を示す。ここで、フロー dh/dt の正負がスイッチする閾値曲線が存在することに注目されたい。輸送費用に対する閾値曲線を“閾値曲線T”，地域1の人口に対する閾値曲線を“閾値曲線P”とする。

図-3(b)は、人口移動フローの”方向”に着目するために、 dh/dt が正(負)の値となる領域を赤色(青色)で図示したものである。任意の状態 (X, h) において人口移動フローが一意に決定されることが図-3より確認される。この結果は、確定論的な枠組みで複数の均衡経路が存在する領域においても成立している。数値解析からも、不確実性の導入により均衡経路の不定性が解消することが確認された。

図-4は、不確実性の度合い(ボラティリティ σ の大きさ)に応じた人口移動フローのパターンを示す。図-4(a)から(d)へとボラティリティを次第に小さくすると、人口移動フローのパターンはおおよそ連続的に変化している。特筆すべきは、 σ を十分にゼロに近づけた

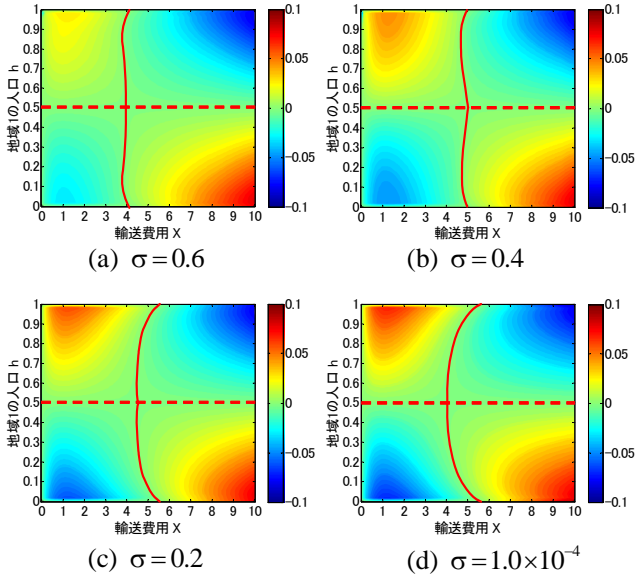


図-4 人口移動フローパターンの感度分析

(d)の場合においても、人口移動フローが一意に決定される点である。これより、不確実性を明示的に考慮した提案モデルの枠組みにおいては、expectationによる均衡選択がロバストであるとは言えない。

以上に述べた数値実験における各パラメータの設定は、以下のとおりである。

- ・短期均衡に関するパラメータ：
 $\lambda = 0.50$, $\xi = 2.00$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$.
- ・長期的な人口移動ダイナミクスに関するパラメータ：
 $\mu = 0.00$, $\sigma = 0.40$, $r = 0.08$, $\gamma = 0.02$.

5. おわりに

本研究では、都市集積均衡パターンの選択問題に対して、経済環境の不確実性が存在する下での人口移動の完全予見的ダイナミクス (perfect-foresight dynamics) を記述したモデルを構築した。解析の結果、動的な均衡経路が確率的に発生する輸送費用のサンプルパスに応じて一意に決定されることが示された。すなわち、不確実性の導入が“expectation”に基づく均衡選択の不定性を克服できることを明らかにした。最後に、本稿では述べていないが、筆者らは均衡ダイナミクスによって実現する長期均衡解の性質について分析を行っている。不確実性の存在を明示的に考慮した本モデルでは、実現する長期均衡解を確定的に知ることはできないが、複数ある停留点のうち、長期的に各々が実現する確率 (均衡解確率分布) を把握することができる。数値解析による分析の結果、i) 均衡解確率分布が長期的に定常状態に収束すること、ii) 均衡解確率分布が初期人口分

布 (h) に依存しないことが明らかとなった。詳細については、講演時に述べたい。

付録.

A-I. $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が起こらないことの証明

背理法を用いて証明する。いま、 $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が成立すると仮定する。このとき、均衡条件 (39), (41) より、 $V_m(\cdot) = V_n(\cdot) - f_{mn}(\cdot)/\gamma$, $V_n(\cdot) = V_m(\cdot) - f_{nm}(\cdot)/\gamma$ が成立する。このとき、 $f_{mn}(\cdot)/\gamma > 0$ より、 $V_m(\cdot) < V_n(\cdot)$ となる。一方、 $f_{nm}(\cdot)/\gamma > 0$ より、 $V_m(\cdot) > V_n(\cdot)$ であることから矛盾する。したがって、 $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が成立しない。
 証明完 ■

A-II. [P-NCP] の数値解法

(1) 離散的表現の枠組み

本章では、偏微分方程式制約付の相補性問題 [P-NCP] が、数値解法の見通しがよい標準形の NCP に帰着することを明らかにし、この問題に対する具体的な解法を示す。標準形の NCP へ帰着することの目的は具体的な数値計算方法の開発にあるため、離散的な (有限次元) 枠組下で議論を展開する。まず十分に大きな交通費用の領域 $[X_{min}, X_{max}] \in \mathcal{R}_+$, 及び、地域 1 の総移動主体数の領域 $[h_{min}, h_{max}] \in [0, 1]$ とする。そして、交通費用と移動主体数の空間 $[X_{min}, X_{max}] \times [h_{min}, h_{max}]$ を、以下の格子：

$$\delta \equiv \{(X^k, h^l) | k = 0, 1, \dots, K, l = 0, 1, \dots, \} \quad (.55)$$

を用いて、 $(X^j, h^k) \equiv (j\Delta X + X_{min}, k\Delta h + h_{min})$ と離散近似する。ただし、 ΔX , Δh は、それぞれ、状態変数についての格子間隔を表す。最適値関数、および人口移動フローの格子 δ の (j, k) 座標における値をそれぞれ $V_m^{j,k}$, $f_{m,n}^{j,k}$ と表現する。このとき、問題 [P-NCP] の未知変数は、ベクトル $\mathbf{V} \equiv [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]'$, およびベクトル $\mathbf{f} \equiv [f_{12}, f_{21}]'$ で定義される。ただし、 $\mathbf{V}_m \equiv [V_m^1, \dots, V_m^K]'$, $\mathbf{V}_n^k \equiv [V_m^{1,k}, \dots, V_n^{J,k}]'$, $\mathbf{f}_{mn} \equiv [f_{mn}^1, f_{mn}^K]'$, $\mathbf{f}_{mn}^k \equiv [f_{mn}^{1,k}, f_{mn}^{J,k}]'$ とする。この枠組の下では、問題 [P-NCP] で現れる、最適値関数の偏微分 $\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot)$ 及び $V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma$ は、以下のように差分近似される：

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) \approx \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V}, \quad (.56)$$

$$V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma \approx \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \quad (.57)$$

ここで、 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) : \mathcal{R}_+^{2JK} \times \mathcal{R}_+^{2JK} \rightarrow \mathcal{R}_+^{2JK}$ は、以下の
ように定義される写像である：

$$\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{V} + \frac{\mathbf{f}}{\gamma} \quad (.58)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位行列を表す。一方、 $\mathbf{L}(\mathbf{f})$ は、中心差
分近似のスキームを用いて得られる $2JK \times 2JK$ 正方
行列である（付録 A-II (5) 参照）。上述の枠組み
の下で、ダイナミクスを表現する無限次元の偏微分方
程式制約付相補性問題は、以下に示す有限次元の問題
[P-NCPd]として表現される。

[P-NCPd] Find $(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such
that

$$\begin{cases} \mathbf{f} \cdot \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) = \mathbf{o} \\ \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \geq \mathbf{o}, \mathbf{f} \geq \mathbf{o}, \end{cases}$$

where

$$\Omega = \{ \mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}, \mathbf{V} \in \mathcal{R}_+^{2JK} \mid \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{o} \}$$

ここで、 Ω は、集合 Ω をベクトル表現したベクトル集合で
ある。 \mathbf{W} は、間接効用フロー $W_m^{j,k} \equiv W_m(j\Delta X, k\Delta h)$
をベクトル表現した定数であり、 $\mathbf{W} \equiv [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2]'$ 、
 $\mathbf{W}_m \equiv [\mathbf{W}_m^1, \dots, \mathbf{W}_m^K]'$ 、 $\mathbf{W}_m^k \equiv [W_m^{1,k}, \dots, W_m^{J,k}]'$
と定義される。

(2) 標準形の非線形相補性問題への帰着

ここでは、有限次元の偏微分方程式制約付相補性問
題[P-NCPd]において、偏微分方程式制約を用い、未知
変数 \mathbf{V} を消去することで、問題を有限次元の標準形の
NCPに帰着させる。まず、以下に示す偏微分方程式制
約を考える。

$$\mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{o} \quad (.59)$$

式(.59)を変形することで、以下のようになり、最適値関数
 \mathbf{V} は、フロー変数 \mathbf{f} の写像：

$$\mathbf{V} = -\mathbf{L}(\mathbf{f})^{-1}\mathbf{W} \quad (.60)$$

として表現することができる。これを相補性問題[P-
NCPd]に代入して整理すれば、以下に示す有限次元の
標準形の非線形相補性問題[NCPd]を得る。

[NCPd] Find $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}$ such that

$$\begin{cases} \mathbf{f} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{f}) = \mathbf{o} \\ \mathbf{G}(\mathbf{f}) \geq \mathbf{o}, \mathbf{f} \geq \mathbf{o} \end{cases}$$

ただし、 $\mathbf{G}(\mathbf{f}) : \mathcal{R}_+^{2JK} \rightarrow \mathcal{R}_+^{2JK}$ は、以下の式で定義さ
れる写像である。

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{f}) \equiv \Psi(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{V}}) \\ \hat{\mathbf{V}} = -\mathbf{L}(\mathbf{f})^{-1}\mathbf{W} \end{cases} \quad (.61)$$

問題[P-NCP]の境界条件 i-iv)を離散的な表現へと変
換する。

境界条件 i) $X \rightarrow 0$

$$f_{mn}^{0,k} = 0, V_m^{0,k} = \frac{W_m^0}{r - \mu} \quad (.62)$$

$$m, n = 1, 2; m \neq n, \forall k \in \{0, \dots, K\}$$

境界条件 ii) $X \rightarrow \infty$

($0 \leq h < 0.5$ の場合)

$$f_{12}^{J,k} = 0, V_1^{J,k} = \frac{W_1^{J,\tilde{k}}}{r - \mu} \quad (.63)$$

$$f_{21}^{J,k} = (\tilde{k} - k)\Delta h, V_2^{J,k} = \frac{W_2^{J,\tilde{k}}}{r - \mu} - \frac{(\tilde{k} - k)\Delta h}{\gamma} \quad (.64)$$

($0.5 \leq h \leq 1$ の場合)

$$f_{12}^{J,k} = (k - \tilde{k})\Delta h, V_1^{J,k} = \frac{W_1^{J,\tilde{k}}}{r - \mu} - \frac{(k - \tilde{k})\Delta h}{\gamma} \quad (.65)$$

$$f_{12}^{J,k} = 0, V_2^{J,k} = \frac{W_2^{J,\tilde{k}}}{r - \mu} \quad (.66)$$

$$h^{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta h = 0.5, \forall k \in \{0, \dots, K\}$$

境界条件 iii) $h = 0$

$$\text{Solve [NCPd] s.t. } f_{12}^{j,0} = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, J\}$$

境界条件 iv) $h = 1$

$$\text{Solve [NCPd] s.t. } f_{21}^{j,0} = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, J\}$$

(3) アルゴリズム

標準形のNCPとして表現された問題は、数理計画法
の分野で開発された様々なアルゴリズムによって解く
ことができる。以下では、最近の数理計画理論の進展
に伴って現れた“merit関数アプローチ”を採用した場
合のアルゴリズムを議論する。このアプローチは、相
補性問題を“merit関数”と呼ばれる関数 $\Phi(\mathbf{f})$ の最小化
問題に帰着させて解くものである。ここで、merit関数
 $\Phi(\mathbf{f})$ とは、 \mathbf{f} が相補性問題の解ならば $\Phi(\mathbf{f}) = 0$ 、そ
うでなければ $\Phi(\mathbf{f}) > 0$ となる連続微分可能な実数値関数
である。本論文では、このような性質を満たすmerit関
数として、以下のFukushima型関数¹¹⁾を採用する。

$$\Phi(\mathbf{f}) \equiv -\mathbf{G}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{f}) - \frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{f}), \quad (.67)$$

where

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) \equiv [\mathbf{f} - \mathbf{G}(\mathbf{f})]_+ - \mathbf{f} \quad (.68)$$

ここで、 $[Z]_+$ は正の実数空間への射影演算子であり、そ
の第 i 要素は $\max\{Z^i, 0\}$ で表される。式(.67)のmerit
関数を用いて問題[P-NCP]を解く最も簡単なアルゴリ
ズムは、以下のようによまとめられる。

[Alg-NCP]

- Step 0:初期可能解 $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}_+^{2JK}$, $n := 1$ の代入.
 Step 1: $\mathbf{G}(\mathbf{f}^{(n)})$ の導出: $\mathbf{f}^{(n)}$, $\mathbf{V}^{0,k}$, $\mathbf{V}^{J,k}$, $\mathbf{V}^{j,0}$, $\mathbf{V}^{j,K}$ を与件として, $\mathbf{V}^{(n)} = -\mathbf{L}(\mathbf{f})^{(n)-1}\mathbf{W}$ を解き, $\mathbf{G}(\mathbf{f}^{(n)})$ を導出.
 Step 2:降下方向ベクトル $\mathbf{d}^{(n)}$ の決定: $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{H}(\mathbf{f}^{(n)})$.
 Step 3:ステップ・サイズ α の決定: $\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \cdot \Phi(\mathbf{f}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)})$.
 Step 4:解の改訂: $\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$.
 Step 5:収束判定: 収束していれば停止, そうでなければ $n := n + 1$ として Step 1へ.

(4) 偏微分作用素 \mathcal{L} の差分近似

式(37)の偏微分作用素 \mathcal{L} の差分近似法を示す. 中心差分法を採用すれば, $\mathcal{L}V_m$ は以下のように差分近似される.

$$\mathcal{L}V_m \approx \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V}$$

ここで, $\mathbf{L}(\mathbf{f})$ は, 以下の行列で定義される.

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1(\mathbf{f}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{L}_2(\mathbf{f}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{f}) \equiv \mathbf{M}_m + \frac{1}{2\Delta h} \mathbf{N}_m(\mathbf{f})$$

ここで, \mathbf{M}_m および \mathbf{N}_m は, 以下の $JK \times JK$ 行列:

$$\mathbf{M}_m \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{D}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_m \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^1 & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\mathbf{E}_m^2 & \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^2 & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & -\mathbf{E}_m^3 & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^{K-1} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & -\mathbf{E}_m^K & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

で定義される. ただし, \mathbf{D}_m は以下に示す $J \times J$ の3項帯行列:

$$\mathbf{D}_m \equiv \begin{bmatrix} c_m & b_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_m & c_m & b_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_m & c_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_m & b_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m & c_m \end{bmatrix}$$

であり, その各要素は, $A \equiv \mu_j \Delta X / 2\Delta X$, $B \equiv \sigma^2 j \Delta X / 2\Delta X^2$ を用いて, それぞれ $a_m \equiv -A + B$, $b_m \equiv A + B$, $c_m \equiv -2B - r$ と定義される. また, \mathbf{E}_m^k は, 以

下に示す $J \times J$ の帯行列を表す.

$$\mathbf{E}_m^k \equiv \begin{bmatrix} f_{21}^{1,k} - f_{12}^{1,k} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & f_{21}^{J,k} - f_{12}^{J,k} \end{bmatrix}$$

A-III. 解の一意性の証明

[P-NCPd]の解の一意性を検討するため, [P-NCPd]と等価な変分不等式問題 [P-VIPd]へと書き換える.

[P-NCPd] Find $(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\Psi(\mathbf{f}^*, \mathbf{V})(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) \geq \mathbf{o}$$

where

$$\Omega = \{ \mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}, \mathbf{V} \in \mathcal{R}_+^{2JK} | \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{o} \}$$

変分不等式問題 [P-VIPd]において, Ω が有界凸閉集合で写像 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ は Ω 上で連続であることから, 変分不等式問題 [P-VIPd]には解が存在する. さらに, 写像 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ が上で連続, 微分可能で, そのJacobianが正定値であることから, $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ は狭義単調である. 以上より, 変分不等式問題 [P-VIPd]の解の一意性が示される. したがって, [P-VIPd]と等価な [P-NCPd]の解の一意性が保証される.

参考文献

- 1) Baldwin, R.: Core-Periphery model with forward-looking expectations, *Regional Sciences and Urban Economics* 31, pp21-49. 2001.
- 2) Dixit, A.K., Stiglitz, J.E.: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *American Economic Review* Vol.67, pp.297-308, 1977.
- 3) Dixit, A.K., Pindyck, R.S.: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- 4) Either, W.: "Decreasing Costs in International Trade and Frank Graham's Argument for Protection", *Econometrica* L, pp.1243-68, 1982.
- 5) Forslid, R., Ottaviano, G.I.P.: An Analytically Solvable Core-Periphery Model, *Journal of Economic Geography* 3, pp.229-240, 2003.
- 6) Frankel, D. M., Pauzner, A.: Resolving Indeterminacy in Dynamic Settings; The Role of Shocks, *Quarterly Journal of Economics*, 115, pp.285-304, 2000.
- 7) Fujita, F., Krugman, P., Venables, A.: *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, The MIT Press, 1999.
- 8) Fujita, M., Thisse, J.-F.: *Economics of Agglomeration*, Cambridge University Press, 2002.
- 9) Fukao, K., Benabou, R.: History versus Expectations: A comment, *The Quarterly Journal of Economics* 108, pp.651-667, 1993.
- 10) Howitt, P., McAfee, R.P.: Stability of Equilibria with Externalities, *Quarterly Journal of Economics* CIII, pp.261-78, 1988.
- 11) Taji, K., Fukushima, M.: Optimization Based Globally Convergent Methods for the Nonlinear Complementarity Problem, *Journal of the Operations Re-*

- search Society of Japan*, Vol.37, No.4, pp.310-331, 1994.
- 12) Krugman, P.,: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy* 99, pp.483-499, 1991a.
 - 13) Krugman, P.,: History versus Expectations, *The Quarterly Journal of Economics* 106, pp.651-667, 1991b.
 - 14) Krugman, P.,: A dynamic spatial model, *NBER Working Paper* 4219, 1992.
 - 15) Matsuyama, Kiminori.,:Increasing Returns, Industrialization, and Indeterminacy of Equilibrium, *Quarterly Journal of Economics*, CVI. pp.617-650, 1991.
 - 16) Murphy, K., Shleifer, A., Vishny, R.,: Industrialization and the Big Push, *Journal of Political Economics* XCVII. pp.1003-23, 1989.
 - 17) Ottaviano, G.I.P.,: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics* 29, pp.51-77, 2001.

(2007.3.1 受付)

Equilibrium Dynamics of Interregional Migration Timing Decision in Agglomeration Economies

Toshimori OTAZAWA and Takashi AKAMATSU

We propose a novel long-term migration dynamics that can overcome the equilibrium indeterminacy of Core-Periphery (CP) model à la Krugman [1991b]. This goal is achieved by introducing uncertainty of economic environment into CP model with forward-looking migration dynamics. We show that an equilibrium path of migration dynamics can be uniquely determined in accordance with each stochastic sample path. We also reveal that Krugman's "expectation" dynamics seldom happens.