ミクロ経済学
尾山 大輔
2019 年 10 月 24 日

宿題 **4** 解答

3.

(1) Hotelling の補題より

$$
\begin{aligned}
L^*(p,w) &= -\frac{\partial \pi}{\partial w}(p,w) = \frac{\alpha}{1-\alpha} p^{\frac{1}{1-\alpha}} w^{-\frac{1}{1-\alpha}},\\
y^*(p,w) &= \frac{\partial \pi}{\partial p}(p,w) = \frac{1}{1-\alpha} p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} w^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.
\end{aligned}
$$

(2) 曲線 $y = F(L)$ 上の任意の点 (L, y) は，ある (p, w) に対して

$$
(L, y) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} p^{\frac{1}{1-\alpha}} w^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{1}{1-\alpha} p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} w^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)
$$

と書けるということなので，w, p を消去して，

$$
y = \frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} L^{\alpha}
$$

という関係を満たすことがわかる．したがって，

$$
F(L) = \frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} L^{\alpha}
$$

が求める生産関数の式である．

4. $x = -\dfrac{1}{1-\alpha}$ とおくと，

$$
\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right\}^{-1}
$$

と書ける．ここで，$\alpha \to 1$ とすると $x \to \infty$ なので，

$$
\lim_{\alpha \to 1} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} = \lim_{x \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right\}^{-1} = \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right\}^{-1} = e^{-1}.
$$