一般均衡理論

尾山 大輔

ミクロ経済学

2019 年 11 月 14 日

経済全体の記述：一般均衡モデル

- 財 $n = 1, 2, \ldots, N$
- 価格ベクトル $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$
- Price-taker の仮定
  すべての主体は財の価格を所与として行動を決定する

企業の表現

- 企業 $j = 1, 2, \ldots, J$
- 各企業の技術：「生産関数」より一般的な「生産可能性集合」を用いて表す
  - $y^j = (y_1^j, y_2^j, \ldots, y_N^j)$: 企業 j の生産計画

    ($y_n^j > 0 \Rightarrow$ 財 n は産出, $y_n^j < 0 \Rightarrow$ 財 n は投入)
  - (利潤) $= p_1 y_1^j + p_2 y_2^j + \cdots + p_N y_N^j$ $(= p \cdot y^j)$
  - Y^j: 企業 j の生産可能性集合
    - 例：$N = 2$, 第 1 財：労働 ($L \geq 0$), 第 2 財：生産財 ($y_2 \geq 0$)

      企業 j の生産関数 $y_2 = F^j(L)$

      企業 j の生産可能性集合 $Y^j = \{(y_1, y_2) \mid y_2 \leq F^j(-y_1)\}$
  - 企業 j の技術制約：$y^j \in Y^j$

企業の利潤最大化

- 企業 j の利潤最大化問題

$$\max_{y^j} \quad p \cdot y^j$$
$$\text{s. t.} \quad y^j \in Y^j$$

- y^{*j} が利潤最大化問題の解であるとは
  - $y^{*j} \in Y^j$
    (y^{*j} は技術制約を満たす)
  - $y^j \in Y^j \Rightarrow p \cdot y^{*j} \geq p \cdot y^j$
    (y^{*j} の利潤は，技術制約を満たすどんな生産計画 y^j の利潤よりも小さくない)

消費者の表現

- 消費者 $i = 1, 2, \ldots, I$
- $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i)$: 消費者 i の消費計画
- u^i: 消費者 i の効用関数　(背後には選好関係 $\succsim^i$ がある)
- $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \ldots, \omega_N^i)$: 初期保有ベクトル
- θ_{ij}: 企業 j の利潤のうちの，消費者 i の所有割合 ($\theta_{1j} + \theta_{2j} + \cdots + \theta_{Ij} = 1$)
- 消費者 i の予算制約

$$
\begin{aligned}
\text{支出} &= p_1 x_1^i + \cdots + p_N x_N^i \; (= p \cdot x^i) \\
\text{収入} &= (p_1 \omega_1^i + \cdots + p_N \omega_N^i) + (\theta_{i1} p \cdot y^1 + \cdots + \theta_{iJ} p \cdot y^J) \\
&= \underbrace{p \cdot \omega^i}_{\text{初期保有からの収入}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y^j}_{\text{企業利潤からの収入}}
\end{aligned}
$$

消費者の効用最大化

- 消費者 i の効用最大化問題

$$\max_{x^i} \quad u^i(x^i)$$

$$\text{s.t.} \quad p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y^j$$

- x^{*i} が効用最大化問題の解であるとは
  ($W^i = p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y^j$ とおくと)
  - $p \cdot x^{*i} \leq W^i$
    (x^{*i} は予算制約を満たす)
  - $p \cdot x^i \leq W^i \Rightarrow u^i(x^{*i}) \geq u^i(x^i)$
    (x^{*i} の効用は，予算制約を満たすどんな消費計画 x^i の効用よりも小さくない)

  (後者は「$u^i(x^{*i}) < u^i(x^i) \Rightarrow p \cdot x^i > W^i$」と同値)

経済全体の記述

私有財産制経済とは次の組のことである：

$$\mathcal{E} = ((u^i)_{i=1}^I, (Y^j)_{j=1}^J, (\omega^i, (\theta_{ij})_{j=1}^J)_{i=1}^I)$$

ただし

- u^i は消費者 i の効用関数
- Y^j は企業 j の生産可能性集合
- ω^i は消費者 i の初期保有ベクトル
- θ_{ij} は消費者 i の企業 j の利潤に対する請求権

配分の達成可能性の定義

- 消費者たちの消費計画と企業たちの生産計画の組 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ を配分という.
- 配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が達成可能 (feasible) な配分であるとは，すべての企業 j について

  $$y^j \in Y^j$$

  が成り立ち，またすべての財 n について

  $$\sum_{i=1}^I x_n^i \leq \sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y_n^j$$

  が成り立つことをいう.

競争均衡の定義

価格ベクトルと配分の組 $(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が経済 $\mathcal{E}$ の競争均衡であるとは，次の条件が成り立つことをいう：

1. [効用最大化] すべての消費者 i について，x^{*i} は
$$\max_{x^i} \ u^i(x^i) \qquad \text{s.t.} \ \ p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$
の解である.
2. [利潤最大化] すべての企業 j について，y^{*j} は
$$\max_{y^j} \ p^* \cdot y^j \qquad \text{s.t.} \ \ y^j \in Y^j$$
の解である.
3. [需給一致] すべての財 n について，
$$\sum_{i=1}^I x_n^{*i} = \sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y_n^{*j}$$
が成り立つ.

注

- 「需給一致」の条件を「(需要) $\leq$ (供給)」という不等号にする流儀もある.

0 次同次性

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が競争均衡ならば，どんな $t > 0$ に対しても $(tp^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ は競争均衡である.

- 競争均衡では価格比のみが決まる．価格の絶対値は決まらない.
- 価格を一斉に t 倍しても，企業の最適生産計画は変わらない：

$$(\text{利潤}) = (tp^*) \cdot y^j = t(p^* \cdot y^j)$$

- 価格を一斉に t 倍しても，消費者の予算制約 (したがって最適消費計画) は変わらない：

$$(tp^*) \cdot x^i \leq (tp^*) \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij}(tp^*) \cdot y^{*j}$$

ワルラス法則

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ を競争均衡の定義のうち「効用最大化」「利潤最大化」の条件を満たすものとする.

- すべての消費者の効用関数が強い単調性 (あるいは, より弱く「局所非飽和性」という条件) を満たすならば,

$$p^* \cdot \sum_{i=1}^I x^{*i} = p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i + p^* \cdot \sum_{j=1}^J y^{*j}$$

  が成り立つ.

- さらに, $p^* \gg 0$ (すべての価格が正) であるとすると, N 個の市場のうち $N-1$ 個の需給が一致すれば残りの 1 個の市場の需給も自動的に一致する.

- 各消費は i の効用関数が強い単調性 (あるいは局所非飽和性) を満たすならば，最適消費計画 x^{*i} は予算制約を等式で満たす：

$$p^* \cdot x^i = p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

- 各辺を i について足し合わせると，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} x^i \\
(\text{右辺}) &= p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} \omega^i + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j} \\
&= p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \underbrace{\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij}}_{=1} p^* \cdot y^{*j} \\
&= p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} \omega^i + \sum_{j=1}^{J} p^* \cdot y^{*j}
\end{aligned}$$

均衡の存在

- (適切な仮定の下で) 競争均衡はちゃんと存在する.
- 「不動点定理」という数学定理を証明で用いる.

  $\to$ 『ミクロ経済学の力』第 3 章 3.3 節 (e)

パレート効率性の定義

- 配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ と $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ について,

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^i) \qquad \text{(すべての消費者 } i \text{ について)}$$
$$u^i(\hat{x}^i) > u^i(x^i) \qquad \text{(ある消費者 } i \text{ について)}$$

  が成り立つとき,
  - $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ は $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ よりパレート優位にある, あるいは
  - $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ は $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ をパレート改善する

  という.

- 達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ がパレート効率的であるとは, それよりパレート優位にある<u>達成可能な</u>配分が存在しないことをいう.

一般均衡モデルの図示

- 2 財・2 消費者 $\cdots$ エッジワース・ボックス
- 1 消費者・1 企業，消費財と労働/余暇
- 1 消費者・2 企業，2 消費財，労働供給一定

厚生経済学の第 1 基本定理

定理

すべての消費者 i について u^i が強い単調性を満たすとする.
$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が $p^* \geq 0$ (すべての価格が非負) なる競争均衡ならば, $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ はパレート効率的である.

- 「単調性」はより弱い「局所非飽和性」という仮定で十分.

証明の準備

補題

u^i が「局所非飽和性」を満たすものとし，x^{*i} が (p, W^i) の下での最適消費計画であるとする．このとき，

$$u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i}) \Rightarrow p \cdot x^i \geq W^i$$

が成り立つ.

証明　対偶を示す.

- $p \cdot x^i < W^i$ とすると，消費計画 x^{*i} に十分近い消費計画 $\tilde{x}^i$ があって

$$p \cdot \tilde{x}^i \leq W^i \text{ かつ } u^i(x^i) < u^i(\tilde{x}^i)$$

  とできる (局所非飽和性).

- x^{*i} は最適消費計画であることより $u^i(\tilde{x}^i) \leq u^i(x^{*i})$ が成り立つので，合わせて $u^i(x^i) < u^i(x^{*i})$ となる.

厚生経済学の第1基本定理の証明

$(p^*, (x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ が $p^* \geq 0$ なる競争均衡であるとする.

Step 1

任意の達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ に対して

$$\sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i \leq \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* y^j$$

が成り立つ.

- 達成可能性の定義より，各 n について

$$\sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y^j - \sum_{i=1}^I x_n^i \geq 0$$

が成り立つ．両辺に p_n^* (≥ 0) をかけて n について足し合わせると

$$p^* \cdot \left(\sum_{i=1}^I \omega^i + \sum_{j=1}^J y^j - \sum_{i=1}^I x^i \right) \geq 0$$

が成り立つ．これを整理すると上の不等式を得る.

Step 2

配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が競争均衡配分 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ よりパレート優位にあり，かつ $(y^j)_{j=1}^J$ が達成可能 (すべての企業 j について $y^j \in Y^j$) ならば

$$\sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i > \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* \cdot y^j$$

が成り立つ.

- $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ よりパレート優位にあり, $(y^j)_{j=1}^J$ が達成可能であるとする.

  定義より,

  (i) すべての i について $u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i})$

  (ii) ある i について $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$

  が成り立つ.

- x^{*i} の最適性より

$$u^i(x^i) > u^i(x^{*i}) \Rightarrow p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

が成り立つ．また，x^{*i} の最適性と u^i の単調性より

$$u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i}) \Rightarrow p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

が成り立つ (補題より).

- したがって，(i), (ii) より

(i′) すべての i について $p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$

(ii′) ある i について $p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$

が成り立つ.

- y^{*j} の最適性と $y^j \in Y^j$ より

$$p^* \cdot y^{*j} \geq p^* \cdot y^j$$

が成り立つ.

- したがって，(i′), (ii′) より

(i″) すべての i について $p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^j$

(ii″) ある i について $p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^j$

が成り立つ.

- ここで，(i″) の両辺を i について足し合わせると，(ii″) より

$$\sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i > \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \underbrace{\sum_{i=1}^I \theta_{ij}}_{=1} p^* \cdot y^j$$

$$= \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* \cdot y^j$$

となる.

Step 3

Step 1 と Step 2 より，「配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が競争均衡配分 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ よりパレート優位にあるならば，それは達成可能でない」ということなので，$((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ はパレート効率的であることが示された.

- 「$p^* \geq 0$」は Step 1 で用いたが，これは達成可能性を $\leq$ で定義したため.
- 「局所非飽和性」は重要.

  飽和するケースでは結論は一般に成り立たない.
  (無差別 “曲線” が厚みを持つ場合.)
- これら以外の仮定はいらない.(「連続性」「準凹性」「凸性」など.)

コアの定義

- 消費者の集合 S ($\{1,\ldots,I\}$ の部分集合) と企業の集合 T ($\{1,\ldots,J\}$ の部分集合) に対して，すべての $j \in T$ について

  $$\sum_{i \in S} \theta_{ij} = 1$$

  が成り立つとき，(S,T) を提携 (coalition) という.

  (他の定義の仕方もある．)

- 提携 (S,T) と，S の消費者たちの消費計画 $(\hat{x}^i)_{i \in S}$ と T の企業たちの生産計画の組 $(\hat{y}^j)_{j \in T}$ に対して，すべての $j \in T$ について，

  $$\hat{y}^j \in Y^j$$

  が成り立ち，すべての財 n について

  $$\sum_{i \in S} \hat{x}^i_n \leq \sum_{i \in S} \omega^i_n + \sum_{j \in T} \hat{y}^j_n$$

  が成り立つとき，$((\hat{x}^i)_{i \in S}, (\hat{y}^j)_{j \in T})$ を (S,T) の達成可能な配分という.

- 提携 (S,T) が配分 $((x^i)_{i=1}^I,(y^j)_{j=1}^J)$ をブロックするとは，(S,T) の達成可能な配分 $((\hat{x}^i)_{i\in S},(\hat{y}^j)_{j\in J})$ が存在して，S 内で後者が前者よりパレート優位にある，つまり，

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^i) \qquad \text{(すべての消費者 } i \in S \text{ について)}$$

$$u^i(\hat{x}^i) > u^i(x^i) \qquad \text{(ある消費者 } i \in S \text{ について)}$$

が成り立つことをいう.

- 達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I,(y^j)_{j=1}^J)$ がコア配分であるとは，それをブロックする提携が存在しないことをいう.

コア配分全体からなる集合をコア (core) という.

コアとパレート効率性

- コア配分はパレート効率的である.

  $\because$ パレート効率的でない配分は全体提携 $(\{1, \ldots, I\}, \{1, \ldots, J\})$ にブロックされる.

競争均衡とコア

定理

すべての消費者 i について u^i が強い単調性を満たすとする.
$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が $p^* \geq 0$ なる競争均衡ならば，$((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ はコアに属する.

- 「単調性」はより弱い「局所非飽和性」で十分.
- 証明は厚生経済学の基本定理の証明とほぼ同じ.

証明の概略

$(p^*, (x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ が $p^* \geq 0$ なる競争均衡であるとする.

Step 1

任意の提携 (S,T) の任意の達成可能な配分 $((x^i)_{i\in S}, (y^j)_{j\in T})$ に対して

$$\sum_{i\in S} p^* \cdot x^i \leq \sum_{i\in S} p^* \cdot \omega^i + \sum_{j\in T} p^* y^j$$

が成り立つ.

Step 2

任意の提携 (S,T) について，S 内で $((x^i)_{i\in S}, (y^j)_{j\in T})$ が $((x^{*i})_{i\in S}, (y^{*j})_{j\in T})$ よりパレート優位にあるならば

$$\sum_{i\in S} p^* \cdot x^i > \sum_{i\in S} p^* \cdot \omega^i + \sum_{j\in T} p^* \cdot y^j$$

が成り立つ.

厚生経済学の第 2 基本定理

定理

次を仮定する：

- すべての消費者 i について u^i は準凹関数である.
- すべての企業 j について Y^j は凸集合である.
- 経済全体の生産可能性集合は自由処分性を満たす.
- すべての消費者 i について u^i は局所非飽和性を満たす.
- すべての消費者 i について u^i は連続関数である.
- 『ミクロ経済学の力』補論 D 補題 D.2 の条件 4a–4c が成り立つ.

このとき，達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ がパレート効率的ならば，価格ベクトル $p^* \geq 0$ と生産計画の組 $(\bar{y}^j)_{j=1}^J$ と初期保有・請求権の組 $(\bar{\omega}^i, (\bar{\theta}_{ij})_{j=1}^J))_{i=1}^I$ が存在して，$(p^*, ((x^i)_{i=1}^I, (\bar{y}^j)_{j=1}^J))$ は $(\bar{\omega}^i, (\bar{\theta}_{ij})_{j=1}^J))_{i=1}^I$ の下での競争均衡となる.

- 「分離定理」という数学定理を証明に用いる.

  無差別曲線の上側の凸性 (効用関数の準凹性) と生産可能性集合の凸性が肝の仮定.

  $\to$ 『ミクロ経済学の力』補論 D

- 競争均衡の定義で需給一致を「(需要) $\leq$ (供給)」で定義したら自由処分性の仮定は不要.

- 局所非飽和性はさらに弱められる.
  $\to$ 『ミクロ経済学の力』補論 D の条件 2

- 効用関数の連続性と条件 4a–4c は,「支出最小化」から「効用最大化」を導くときに使う.