経済学のための数学

「経済学がおもしろい：理系もわかる経済学」

尾山 大輔

www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp/komabaOmni12

2012 年 6 月 7 日

包絡線定理 3：オークション理論から

1. オークションの例
2. セカンドプライス・オークションとファーストプライス・オークションの分析 $\cdots$ 売り手にとっての期待収益の比較

   参考文献：
   梶井厚志・松井彰彦『ミクロ経済学—戦略的アプローチ』第 6 章，日本評論社

3. 一般論：「収入同値定理」 $\cdots$ 包絡線定理が出てくる

   参考文献：
   尾山大輔・安田洋祐「経済学で出る包絡線定理」『経済セミナー』2011 年 10・11 月号

オークションのいろいろ

- イギリス式オークション (競り上げオークション)
ある低い価格からスタートし，入札者はより高い価格を宣言していく．より高い価格をつける人がいなくなったら，最後に残った人が落札者となり，宣言した価格が落札価格となる．

- オランダ式オークション (競り下げオークション)
ある高い価格からスタートし，徐々に価格が下がっていく．最初に購入すると宣言した人が落札者となり，そのときの価格が落札価格となる．

- ファーストプライス・オークション
  入札者は同時に他人の入札価格を見ることなしに自分の入札価格を提出する．最も高い価格を提出した人が落札者となり，その人が提出した入札価格が落札価格となる.

- セカンドプライス・オークション (Vickrey オークション)
  入札者は同時に他人の入札価格を見ることなしに自分の入札価格を提出する．最も高い価格を提出した人が落札者となり，その人以外の入札者の入札価格の中で最も高い価格が落札価格となる.

コメント

- 実は，イギリス式オークションはセカンドプライス・オークションと同等．

  プレイヤー i は価格が b_i を超えたら降りようと思っているとする．
  $b_1 > b_2$ とすると，価格が b_2 を超えたところで入札者 2 が降り，入札者 1 が落札者となる．落札額は b_2.

- 実は，オランダ式オークションはファーストプライス・オークションと同等．

  プレイヤー i は価格が b_i まで下がってきたら購入しようと思っているとする．$b_1 > b_2$ とすると，価格が b_1 まで下がってきたところで入札者 1 が手を挙げ落札者となる．落札額は b_1.

- 理論的には，セカンドプライス・オークションが非常にだいじ．

- 以下，セカンドプライス・オークションとファーストプライス・オークションの 2 つの封印 (sealed-bid) オークションを分析する．

売り手の事前の期待収益

問　売り手にとって,
ファーストプライス・オークションとセカンドプライス・オークションは
どちらが得か？ (期待収益はどちらが大きいか？)

答　同じ！　(一定の仮定の下で)

- 具体的な状況で期待収益をそれぞれ計算することで，これを確かめる.
- 一般に成り立つ. $\cdots$ 「収入同値定理」

封印オークションの定式化

売り手がある財 1 単位をオークションにかける．売り手にとっての価値=0 とする．

- プレイヤー (入札者)：1 と 2
- プレイヤー i の財に対する評価額：v_i $\quad\cdots$ プレイヤー i の私的情報
- プレイヤー i の戦略：
  自分のそれぞれの評価額 (タイプ) v_i に対して，評価額が v_i のときの入札額 $b_i(v_i)$ を定めた関数 $b_i(\cdot)$

  戦略の一例：$b_i(v_i) = 0.8v_i$
  “つねに自分の評価額の 8 割の値を入札価格とする”
- プレイヤー i の利得関数：$u_i(b_i, b_j; v_i)$

  もちろん，オークションのルールによって決まる．

セカンドプライス・オークション

1 番高い入札価格を書いたプレイヤーが，2 番目に高い入札価格で落札する．
(同じ額を書いたときは等確率で落札者を選ぶことにする．)

タイプ v_1 のプレイヤー 1 の利得：

$$u_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_2 & b_1 > b_2 \text{ のとき}, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_2) & b_1 = b_2 \text{ のとき}, \\ 0 & b_1 < b_2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

($u_2(b_2, b_1; v_2)$ も同様．)

定理

セカンドプライス・オークションにおいては $b_i(v_i) = v_i$ という戦略が弱支配戦略.

したがって，売り手の事後的な収入は $\boxed{}$.

- 自らの私的情報を正直に申告するのが弱支配戦略.
  (他人の評価額の分布を知らなくてもよい．)
- 財の価値を最も高く評価する入札者が財を手に入れる.
  $=$ 社会的効率性が達成される.

証明

プレイヤー 1 について証明する.
タイプが v_1 であるとする.
このとき，$b_1 = v_1$ とするのが最適入札価格のひとつであることを示したい.

v_1 と相手の入札額 b_2 との大小関係について 3 つのケースに場合分けして考える.

(i) $v_1 > b_2$ のとき：
プレイヤー 1 が勝つと，利得 $=$
したがって，$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ことを選好する.

入札額を $b_1 = v_1$ とすると $b_1 > b_2$ (場合分けの仮定より) なので,
プレイヤー 1 が$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ことになる.
$\therefore$ v_1 は最適入札額 (のひとつ) である.

(ii) $v_1 = b_2$ のとき：
プレイヤー 1 が勝つと，利得 $=$
つまり，どんな入札額に対しても 利得 $= \boxed{\quad}$.
とくに， v_1 は最適入札額 (のひとつ) である.

(iii) $v_1 < b_2$ のとき：
プレイヤー 1 が勝つと，利得 $=$
したがって， $\boxed{\quad}$ ことを選好する.

入札額を $b_1 = v_1$ とすると $b_1 < b_2$ (場合分けの仮定より) なので,
プレイヤー 1 が $\boxed{\quad}$ ことになる.
$\therefore$ v_1 は最適入札額 (のひとつ) である.

ファーストプライス・オークション

1 番高い入札価格を書いたプレイヤーが，自身の入札価格で落札する．
(同じ額を書いたときは等確率で落札者を選ぶことにする．)

タイプ v_1 のプレイヤー 1 の利得：

$$u_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1 & b_1 > b_2 \text{ のとき,} \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1) & b_1 = b_2 \text{ のとき,} \\ 0 & b_1 < b_2 \text{ のとき.} \end{cases}$$

($u_2(b_2, b_1; v_2)$ も同様．)

このゲームのベイジアン・ナッシュ均衡 (BNE) を求めよう.
(弱支配戦略は存在しない．)

各プレイヤー i のタイプ v_i は独立に $[0, 1]$ 区間に一様分布していると仮定する
(したがって，プレイヤー 1, 2 は対称).

プレイヤー 2 の戦略 b_2 を

$$b_2(v_2) = kv_2$$

とおいて，プレイヤー 1 の最適反応を求める.

対称性よりプレイヤー 1 の戦略も $b_1(v_1) = kv_1$ と書けるはず．$\Rightarrow$ k が定まる.

- タイプが v_1 で，b_1 を入札額としたとき，プレイヤー 1 が落札する確率は

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}(b_1 \geq b_2(v_2)) = \mathsf{Pr}(b_1 \geq kv_2) &= \mathsf{Pr}(v_2 \leq \frac{b_1}{k}) \\ &= \frac{b_1}{k}. \qquad \text{(一様分布の仮定より)}\end{aligned}$$

- よって，プレイヤー 1 の期待利得は

$$(v_1 - b_1) \cdot \mathsf{Pr}(b_1 \geq b_2(v_2)) + 0 \cdot \mathsf{Pr}(b_1 < b_2(v_2)) = (v_1 - b_1)\frac{b_1}{k}.$$

- したがって $\boxed{\qquad\qquad}$ が最適入札額 (つまり $k = \boxed{\qquad}$).

- 対称性より $\boxed{\qquad\qquad}$ がプレイヤー 2 の最適入札額.

収入同値定理

売り手の事後的な収益は

- (買い手の評価額 v_i の分布の仮定によらず)

  セカンドプライス・オークションでは $\boxed{}$

- (買い手の評価額 v_i が独立に $[0,1]$ 区間に一様分布するという仮定の下では)

  ファーストプライス・オークションでは $\boxed{}$

<u>問</u> どちらのオークションがより高い期待収益をもたらすか？

「v_i が独立に $[0,1]$ 区間に一様分布する」という仮定の下で計算すると $\cdots$

$\cdots$ 同じ値になる．(自習問題)

実は，この「同じ値になる」という結論は分布に関する仮定に依らない！
(値じたいはもちろん分布による．)

収入同値定理 (Myerson)

「評価額が一番高い人が財を落札する」,「評価額が独立に分布する」,
「評価額 $= 0$ の人が財を落札する確率はゼロ (かつ支払いもゼロ) である」
ようなオークションはすべて全く同じ期待収益をもたらす.

- セカンドプライス・オークション, ファーストプライス・オークションは「評価額が一番高い人が財を落札する」という性質 (効率性) を満たす.

このあとの流れ

- 直接表明メカニズムと顕示原理
- インセンティブ条件と包絡線定理 (板書で)
- 収入同値定理 (板書で)

直接表明メカニズム (q, p)

- 各人 i は自身の評価額 v_i を申告する (申告額を x_i と書くことにする).
- 申告額の組 $x = (x_1, \ldots, x_N)$ にもとづいて

  $$q(x) = (q_1(x), \ldots, q_N(x)), \qquad p(x) = (p_1(x), \ldots, p_N(x))$$

  を割り当てる.

  ただし,

  - $q_i(x) = 1$ は「i は財を受けとる」, $q_i(x) = 0$ は「i は財を受けとらない」を意味する.

    ($q_i(x) = 0$ or 1, $\sum_{i=1}^{N} q_i(x) = 1$.)
  - $p_i(x)$ は i が支払う金額.

したがって i の事後的な利得は

$$q_i(x)v_i - p_i(x).$$

顕示原理 (Revelation Principle)

顕示原理

どんなオークションとその均衡に対しても，次のような直接表明メカニズムが存在する：

- 自身の評価額を正直に申告する (つまり $x_i = v_i$ とする) のが均衡である.

  (他人が $x_j = v_j$ とするならば自分も $x_i = v_i$ とするのが最適である．)
- その結果がオークションの均衡の結果と一致する.

したがって，直接表明メカニズムを分析すれば
すべてのオークション・メカニズムを分析したことになる.

例

- ファーストプライス・オークションの均衡とその結果
  - 各人 i は $b_i(v_i) = \frac{1}{2}v_i$ にしたがって入札する.
  - $\frac{1}{2}v_i > \frac{1}{2}v_j$ ならば i が財を受けとり, $\frac{1}{2}v_i$ を支払う.
- 同じ結果を正直申告均衡として実現する直接表明メカニズム
  - 各人 i は自身の評価額 v_i を申告する (申告額を x_i と書くことにする).
  - $\frac{1}{2}x_i > \frac{1}{2}x_j$ ならば i が財を受けとり, $\frac{1}{2}x_i$ を支払う.

$\Rightarrow$ 相手が $x_j = v_j$ とするならば自分も $x_i = v_i$ とするのが最適.