マッチング理論入門

尾山 大輔

現代経済理論 第 9 回

2020 年 6 月 12 日

担当教員

- 尾山 大輔
  www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp
- 専門
  ゲーム理論，経済理論
- 2020 年度担当授業
  - ゲーム理論 (S1)
  - 数学 II (S1)
  - Topics in Economic Theory (A1)
  - 少人数講義 (ゼミ)
    (今年度は「凸解析」に関する数学書の輪読)

今回の内容

- 「ミクロ経済学，ゲーム理論」担当ということになっていますが，浅く広くどんな分野かを紹介するのではなく，一つのトピックにしぼって深く掘り下げます．
- トピックは，進学選択制度の第 2 段階で採用されている受入保留 (DA) マッチング・メカニズム．
- その性質は事実として聞かされていると思いますが，その証明をやってみます．

東京大学・進学選択制度

- 新 1 年生 (約 3,000 人) は文科一類〜三類，理科一類〜三類のいずれかに入学する (前期課程)
- 3 年進学時に初めて専門分野の学部・学科に所属する (後期課程)

  (“Late specialization”)
- 後期課程の学部・学科には，それぞれ受け入れ学生の許容量があるので，すべての学生の希望をかなえることはできない
- 何らかの「マッチング」の方式を導入しないといけない

2017 年度実施回から導入された制度

- 第一段階 (約 70%)：
  単願方式
- 第二段階 (約 30%)：
  「受入保留方式」(Deferred Acceptance 方式) により進学内定先を決定
- (第三段階)
- DA 方式の運用には，マッチング/マーケットデザインの経済学理論の知見が生かされている

受入保留アルゴリズム (DA アルゴリズム)

- Gale and Shapley (1962) により提案・分析される
- それ以前にも (またそれ以後にもおそらく Gale-Shapley とは独立に)，現実に使われた例あり
- 導入例
  - 研修医マッチング (米国，日本など)
  - 公立学校選択 (ニューヨーク市，ボストン市など)
  - . . .
- 2012 年のノーベル経済学賞の受賞理由の一部 (Alvin E. Roth，Lloyd S. Shapley)

参考文献

- Gale and Shapley, "College Admissions and the Stability of Marriage," American Mathematical Monthly, 1962
- 小島武仁「マッチング・マーケットデザイン講義」『経済セミナー』2017 年 6・7 月号〜2018 年 4・5 月号
- Hatfield and Milgrom, "Matching with Contracts," American Economic Review, 2005
- 松井彰彦「経済学がおもしろい ⟨ゲーム理論と制度設計⟩」『経済学を味わう』日本評論社，2020 年
- 坂井豊貴『マーケットデザイン—最先端の実用的な経済学』ちくま新書, 2013 年
- 安田洋祐編著『学校選択のデザイン—ゲーム理論アプローチ』NTT 出版, 2010 年

例

- 学生たち: 1, 2, 3
- 進学単位たち: X, Y, Z
- 各進学単位の定員は 1 とする
- 各学生は進学単位たちに対して厳密な (同順位なし) 好みの順序 (選好順序) をもつ
- 各進学単位は学生たちに対して (成績等に基づく) 厳密な優先順位 (選好順序) をもつ
- 選好順序の例

学生		進学単位	
1	$Y \succ X \succ Z$	X	$1 \succ 2 \succ 3$
2	$X \succ Y \succ Z$	Y	$2 \succ 3 \succ 1$
3	$Y \succ X \succ Z$	Z	$1 \succ 2 \succ 3$

- 「誰の」選好順序かを明示して書くときは

学生		進学単位	
1	$Y \succ_1 X \succ_1 Z$	X	$1 \succ_X 2 \succ_X 3$
2	$X \succ_2 Y \succ_2 Z$	Y	$2 \succ_Y 3 \succ_Y 1$
3	$Y \succ_3 X \succ_3 Z$	Z	$1 \succ_Z 2 \succ_Z 3$

“繰り返し単願方式” (従来方式の単純化)

- 各学生は進学したい進学単位 1 つに応募する
- 各進学単位は応募してきた学生のうち，定員内で優先順位の高い学生たちを受け入れる (確定)
- あぶれた学生は，前段階までで定員に達していない進学単位から 1 つ選んで応募する
- 以下これを繰り返す

“繰り返し単願方式” (従来方式の単純化)

各学生が自身の志望順序どおりに申告したとすると：

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

“繰り返し単願方式” (従来方式の単純化)

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

性質 (問題点)

1. 正当な羨望 (justified envy) が存在しうる (“fair” でない)

   学生 1 の学生 2 に対する羨望は “正当”
   (進学単位 X にとっても 1 の方が 2 より優先順位が上)

   (“不安定”)

“繰り返し単願方式” (従来方式の単純化)

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

性質 (問題点)

2. 学問的興味 (真の志望順序) と異なる順序を申告することで，得をしうる

   学生 1 が (2 位の) 進学単位 X に進学したいと申告すると $\rightarrow$ 1-X, 2-Z, 3-Y

   最適行動が他の学生の申告行動に依存する
   $\rightarrow$ 戦略的かけひき (思考/行動) が利益を生みうる

受入保留アルゴリズム (DA アルゴリズム)

- 入力
  - 各学生：進学単位たちに対する選好順序
  - 各進学単位：学生たちに対する選好順序
- 出力
  - (あとで説明される) いくつかの性質を満たすマッチング

受入保留アルゴリズム (DA アルゴリズム)

- アルゴリズム内部の動き (コンピュータ・プログラムが実行)
  - 各学生が選好順位の最も高い進学単位に応募する

    各進学単位は応募してきた学生のうち，定員内で優先順位の高い学生たちを暫定的に受け入れる (残りを拒否)
  - あぶれた学生は前段階で拒否されていない進学単位のうち選好順位の最も高い進学単位に応募する

    各進学単位は暫定的に受け入れている学生と今回応募してきた学生とを合わせて，定員内で優先順位の高い学生たちを暫定的に受け入れる (残りを拒否)
  - 以下これを繰り返す
  - あぶれている学生がいなくなるか，あぶれいている学生のリストに拒否されていない進学単位がなくなった時点で終了

受入保留方式 (DA 方式)

各学生が自身の志望順序どおりに申告したとすると：

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

受入保留方式 (DA 方式)

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

性質 (利点)

1. 正当な羨望 (justified envy) が存在することはない
   (公正性，安定性)

受入保留方式 (DA 方式)

学生				進学単位			
1:	Y	X	Z	X:	1	2	3
2:	X	Y	Z	Y:	2	3	1
3:	Y	X	Z	Z:	1	2	3

性質 (利点)

2. 他の学生の申告行動が何であれ学問的興味 (真の志望順序) と異なる順序を申告して得することはない
   (支配戦略誘因整合性，耐戦略性)

   (戦略的かけひきが利益を生むことはない)

受入保留方式によるマッチングの性質

- 正当な羨望 (justified envy) が存在することはない (公正性，安定性)
- 他の学生の申告行動が何であれ学問的興味 (真の選好順序) と異なる順序を申告して得することはない (“耐戦略性”)
- 安定なマッチングは一般に複数存在する
  - 学生提案型 DA 方式
    $\rightarrow$ 学生側にとって最も望ましい安定マッチングを出力する
  - 進学単位提案型 DA 方式
    $\rightarrow$ 進学単位側にとって最も望ましい安定マッチングを出力する

多対一マッチング (Many-to-One Matching) の定式化

- $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$: 学生の集合
- $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$: 進学単位の集合
- $q_c \geq 1$: 進学単位 $c \in C$ の定員
- $\succ_s$: 学生 $s \in S$ の $C \cup \{\emptyset\}$ 上の強選好順序
- $\succ_c$: 進学単位 $c \in C$ の $S \cup \{\emptyset\}$ 上の強選好順序

- マッチング μ:
  - すべての学生 $s \in S$ に対して
    $$\mu(s) \in C \cup \{\emptyset\}$$
  - すべての進学単位 $c \in C$ に対して
    $$\mu(c) \subset S, \quad |\mu(c)| \leq q_c$$
  - すべての学生 $s \in S$，すべての進学単位 $c \in C$ に対して
    $$\mu(s) = c \iff s \in \mu(c)$$
- マッチング・メカニズム (あるいは単にメカニズム) とは，学生たち・進学単位たちから提出された選好順序の組に対してマッチングを返す関数のこと

安定性 (Stability)

- 個人合理性

  マッチング μ が個人合理的であるとは

  1. すべての学生 $s \in S$ に対して，$\mu(s) = \emptyset$ または $\mu(s) \succ_s \emptyset$
  2. すべての進学単位 $c \in C$ に対して，すべての $s \in \mu(c)$ に対して $s \succ_c \emptyset$

  が成り立つことである.

- ブロッキング・ペア

  学生と進学単位の組 (s, c) がマッチング μ に対するブロッキング・ペアであるとは

  1. $c \succ_s \mu(s)$
  2. 「$|\mu(c)| < q_c$ かつ $s \succ_c \emptyset$」または「ある $s' \in \mu(c)$ に対して $s \succ_c s'$」

  が成り立つことである.

  (条件 2 の後者のとき「s は s' に対して正当な羨望をもつ」といえる．)

- 安定性

  マッチング μ が安定であるとは,

  1. μ が個人合理的，かつ
  2. μ に対するブロッキング・ペアが存在しない (無羨望性)

  ことである.

- マッチング・メカニズムが安定であるとは，どんな提出選好順序の組に対しても，それが返すマッチングが安定であることである.

受入保留 (Deferred Acceptance) メカニズム

- (学生応募型) 受入保留 (DA) メカニズムとは，提出された選好順序の組に対して，先に説明した (学生応募型) 受入保留アルゴリズムによって決定されるマッチングを返すようなメカニズムのことである.

DA メカニズムの安定性

命題

DA メカニズムは安定メカニズムである.

証明

個人合理性

- DA アルゴリズムのルール上
  - 各学生 s は進学したくない進学単位 ($\emptyset \succ_s c$ なる c) に内定することはないし
  - 各進学単位 c は受け入れられない学生 ($\emptyset \succ_c s$ なる s) を内定させることはない

ので，個人合理性はつねに満たされる.

- DA が返すマッチングを μ とする.
- 任意の学生 s に注目し,

$$c \succ_s \mu(s) \tag{1}$$

とする. (s, c) が μ に対するブロッキング・ペアにはなりえないことを示す.

- $\emptyset \succ_c s$ ならば (s, c) はブロッキング・ペアにならないので, $s \succ_c \emptyset$ とする.
- DA アルゴリズムのルールより, $c \succ_s \mu(s)$ ということは, 学生 s は進学単位 c に応募していたが拒否された, ということで,

  c からすると, この時点で s ではなく別の学生たちをキープしたということであり, その中で c にとって 1 番優先順位の低い学生を s' とすると

$$s' \succ_c s \tag{2}$$

が成り立つ.

- DA アルゴリズムのルールより，進学単位 c は s' をキープしつづけるか，s' を拒否して他の学生を受け入れるかであるので，すべての $s'' \in \mu(c)$ に対して

$$s'' \succ_c s' \text{ または } s'' = s' \tag{3}$$

が成り立つ.

- (2) と (3) より，すべての $s'' \in \mu(c)$ に対して

$$s'' \succ_c s \tag{4}$$

が成り立つ.

- すなわち，学生 s の DA マッチング μ での内定先 $\mu(s)$ より望ましい進学単位 c にとっては，μ での内定学生たち $\mu(c)$ の方が s より望ましい，ということなので，これは必ず「片思い」.

- つまり，DA マッチングに対するブロッキング・ペアは存在しない，すなわち，DA は無羨望性を満たす.

DA メカニズムの学生側最適性

命題

DA マッチング μ^{DA} は，すべての学生にとって，すべての安定マッチングの中で最も好ましいマッチングである.

(μ^{DA} は学生最適安定マッチングである．)

証明

- 学生 s と進学単位 c に対して，ある安定マッチング μ が存在して $\mu(s) = c$ となるときに，「s にとって c は達成可能である」という．
- どの学生も，DA アルゴリズムのどのステップにおいても自分にとって達成可能な進学単位から拒否されることはない，ということを示せばよい．
- DA アルゴリズムのどこかのステップで，達成可能な進学単位から拒否された学生が存在したとする．
  - そのような学生のうち，最も早いステップで拒否された学生を s
  - s を拒否した進学単位を c
  - s が c に内定するような安定マッチングを μ

  とする．

- c は s を拒否したので，この時点で c は定員いっぱいで，この時点で c に受け入れられているが $\mu(c)$ には含まれない学生がいるはずで，

  そのような学生を s' とすると，$\mu(s') \neq c$ かつ

$$s' \succ_c s \tag{5}$$

  が成り立つ．

- s がはじめて達成可能な進学単位に拒否にあった学生なので，s' は $\mu(s')$ に応募していないはずである．したがって，

$$c \succ_{s'} \mu(s') \tag{6}$$

  が成り立つ．

- 仮定より $\mu(s) = c$ であったが，(5), (6) は (s', c) が μ に対するブロッキング・ペアであることを意味する．
- これは μ が安定マッチングであることに矛盾する．
- 以上より，達成可能な進学単位から拒否される学生は存在しないことが示された．

DA メカニズムの進学単位側最悪性

命題

DA マッチング μ^{DA} は，すべての進学単位にとって，すべての安定マッチングの中で最も好ましくないマッチングである．

(μ^{DA} は進学単位最悪安定マッチングである．)

- どんな進学単位 c とどんな安定マッチング μ に対しても
  1. $|\mu^{\mathsf{DA}}(c)| \leq |\mu(c)|$
  2. $s \in \mu^{\mathsf{DA}}(c)$, $s \notin \mu(c)$, $s' \in \mu(c)$ ならば $s' \succ_c s$

証明

1.

- ある進学単位 c と安定マッチング μ が存在して $|\mu^{\mathsf{DA}}(c)| > |\mu(c)|$ が成り立っているとする.

  $(|\mu^{\mathsf{DA}}(c)| \leq q_c$ なので $|\mu(c)| < q_c$ であることに注意する．$)$
- すると，ある学生 s が存在して $s \in \mu^{\mathsf{DA}}(c)$, $s \notin \mu(c)$ である.
- μ^{DA} は学生最適なので，$c \succ_s \mu(s)$ である.
- $|\mu(c)| < q_c$ なので，(s, c) は μ に対するブロッキング・ペアである.
- これは μ が安定マッチングであることに矛盾する.

2.

- ある進学単位 c と学生 s, s' と安定マッチング μ が存在して
  - $s \in \mu^{\mathsf{DA}}(c)$, $s \notin \mu(c)$
  - $s' \in \mu(c)$
  - $s \succ_c s'$

  が成り立っているとする.
- μ^{DA} は学生最適なので，$c \succ_s \mu(s)$ である.
- したがって，(s, c) は μ に対するブロッキング・ペアである.
- これは μ が安定マッチングであることに矛盾する.

僻地病院定理 (Rural Hospitals Theorem)

命題

- すべての安定マッチングにおいて，どこかに内定する学生の集合は同一である.
- 各進学単位に対して，すべての安定マッチングにおいて，内定者数は同一である.

証明

- DA が返す安定マッチングを μ^{DA} とし，μ を任意の安定マッチングとする．
- μ^{DA} において内定する学生の集合を $\bar{S}^{\mathsf{DA}}$，μ において内定する学生の集合を $\bar{S}$ とする．
- μ^{DA} は学生最適安定マッチングなので $\bar{S} \subset \bar{S}^{\mathsf{DA}}$ でないといけない．

  したがって，$|\bar{S}| \leq |\bar{S}^{\mathsf{DA}}|$ も成り立つ．
- μ^{DA} は進学単位最悪安定マッチングなので，各進学単位 c に対して $|\mu(c)| \geq |\mu^{\mathsf{DA}}(c)|$ が成り立つ．
- 内定学生数の関係から $|\bar{S}| = \sum_{c \in C} |\mu(c)|$, $|\bar{S}^{\mathsf{DA}}| = \sum_{c \in C} |\mu^{\mathsf{DA}}(c)|$ が成り立つので，上の不等式たちから

$$|\bar{S}| = \sum_{c \in C} |\mu(c)| \geq \sum_{c \in C} |\mu^{\mathsf{DA}}(c)| = |\bar{S}^{\mathsf{DA}}| \geq |\bar{S}|$$

  が成り立つ．

- したがって，すべての不等号が等号で成り立つ.
- とくに，$|\bar{S}| = |\bar{S}^{\mathsf{DA}}|$ が成り立ち，$\bar{S} \subset \bar{S}^{\mathsf{DA}}$ と合わせて $\bar{S} = \bar{S}^{\mathsf{DA}}$ が成り立つ.
- また，各進学単位 c に対して $|\mu(c)| = |\mu^{\mathsf{DA}}(c)|$ が成り立つ.

DA メカニズムの学生側耐戦略性 (Strategy-Proofness)

命題

すべての学生に対して，それ以外の学生・進学単位がどんな選好順序を提出しても，自身の選好順序を提出するのが最適である.

(自身の選好順序と異なる選好順序を提出しても得することはない．)

証明

- ある学生 s に注目し，それ以外の学生・進学単位の選好順序の組 $\succ_{-s}$ を任意に固定する.
- s が自身の選好順序 $\succ_s$ を提出したときに，全参加主体の選好順序の組 $(\succ_s, \succ_{-s})$ に対して DA が返すマッチングを μ とする.
- 一方，s が選好順序 $\succ'_s$ を提出したときに，全参加主体の選好順序の組 $(\succ'_s, \succ_{-s})$ に対して DA が返すマッチングを μ' とする.
- s にとって，μ' での内定先は μ での内定先よりよくなることはない，つまり「$\mu(s) \succ_s \mu'(s)$ または $\mu(s) = \mu'(s)$」となることを示したい.
- s が μ' においてどこにも内定しない ($\mu'(s) = \emptyset$) ならばこの結論は明らかに成り立つので，以下，s は μ' において何らかの進学単位 x に内定する ($\mu'(s) = x$) とする.

Step 1

- s が「x だけしか行きたくない」という選好順序 ($\succ_s''$ とする) を提出したときに，全参加主体の選好順序の組 $(\succ_s'', \succ_{-s})$ に対して DA が返すマッチングを μ'' とする.
- このとき，$\mu''(s) = x$ である.

Step 1 の証明

- μ' は，$(\succ'_s, \succ_{-s})$ に対して DA が返したマッチングなので，$(\succ'_s, \succ_{-s})$ に鑑みて安定マッチングである.
- したがって，μ' は $(\succ''_s, \succ_{-s})$ に鑑みても安定マッチングである.
  - $\because$ s 以外の主体に関しては選好もマッチングも変わらないので，
    安定でないとすれば s が ($\succ''_s$ に鑑みて) 不満を持っているということになるが，$\succ''_s$ での最高位の進学単位に内定しているので，それもあり得ない.
- ところで，μ'' は，$(\succ''_s, \succ_{-s})$ に対して DA が返したマッチングなので，$(\succ''_s, \succ_{-s})$ に鑑みて学生最適安定マッチングである.
- よって，s の μ'' での内定先 $\mu''(s)$ は μ' での内定先 $\mu'(s)$ より ($\succ''_s$ に鑑みて) 悪くなることはない.
- したがって，$\mu''(s) = x$ でないといけない.

Step 2

- s 自身の選好順序を x のところで切って残りを削除したものを $\succ_s^x$ と書くことにする.
- s がどこにも内定しない ($\mu'''(s) = \emptyset$ となる) ようなマッチング μ''' は $(\succ_s^x, \succ_{-s})$ に鑑みて安定マッチングではない.

Step 2 の証明

- Step 1 で示したように，$(\succ_s'', \succ_{-s})$ に鑑みて安定マッチングである μ'' において，s は内定先があった ($\mu''(s) = x$).
- よって，僻地病院定理より，μ''' は $(\succ_s'', \succ_{-s})$ に鑑みて安定マッチングではない.
- つまり，μ''' に対する，$(\succ_s'', \succ_{-s})$ に鑑みての何らかのブロッキング・ペア (s', c) が存在する.
- このペア (s', c) は，$(\succ_s^x, \succ_{-s})$ に鑑みても μ''' に対するブロッキング・ペアである.

  $\because$ $s' \neq s$ ならば，s 以外は選好順序が同じなので，ここでもブロッキング・ペアである.

  $s' = s$ ならば，$\mu'''(s) = \emptyset$ より $c = x$ のはずなので，ここでも $c = x \succ_s^x \mu'''(s) = \emptyset$ である.
- よって，μ''' は $(\succ_s^x, \succ_{-s})$ に鑑みて安定マッチングでない.

Step 3

- s が自身の選好順序 $\succ_s$ を提出したときに，$(\succ_s, \succ_{-s})$ に対して DA が返すマッチングを μ とすると，$\mu(s) \succ_s x$ または $\mu(s) = x$ である.

Step 3 の証明

- s が $\succ_s^x$ を提出すると，$(\succ_s^x, \succ_{-s})$ に対して DA が返すマッチングは安定マッチングなので，Step 2 より，そこでは s はどこかに内定する.

  それは，x か，それより s にとって望ましい進学単位である.
- $\succ_s^x$ ではなく，x より下の進学単位を含めた，フルの選好順位 $\succ_s$ を提出しても，DA が返すマッチングは変わらない.
- したがって，$\mu(s) \succ_s x$ または $\mu(s) = x$ である.

- 以上より，他の主体のどんな提出選好順序の組 $\succ_{-s}$ に対しても，s 自身の選好順序と異なる選好順序を提出しても s にとってよりよい進学単位に内定することはない，ということが示された．

安定性と両側耐戦略性

命題

安定性と両側耐戦略性を同時に満たすメカニズムは存在しない.

受入保留方式のアレンジ

- 実際の運用は，先の具体例より複雑
  - 「指定科類枠」「全科類枠」
  - . . .
- 「“よい性質” を保つようなアレンジ」「“よい性質” を壊すようなアレンジ」
  . . . 理論的な知見の蓄積がある
- 「“よい性質” を壊すようなアレンジ」の例
  - 入り組んだ定員設定
  - 第 1 志望優先 (“志望の強さを測りたい”)

    . . . 志望リスト提出を「マッチングを決定する」「志望の強さを測る」手段として使うことは両立しない！

おわりに

- 制度は人が設計するもの.
- 制度が変われば人々の行動も変わる.
- 評価基準を定めて，制度を評価することができる.
- 一般に，人の心の中にある選好をありのままに表明してもらい，それに基づいて配分を決定するような制度をうまく設計するのは困難である.
- 今回の事例は，閉じた，比較的単純なケース.

  より大きな制度設計はより複雑.
- 今回の事例は，貨幣を利用しない制度設計の例.

  配分は離散的 $\longleftrightarrow$ 「貨幣」の役割