2. 分離定理

尾山 大輔

経済学のための数学

2024 年 5 月 9 日，16 日

ふつうの方針 (教科書の方針)

強分離定理 (定理 3.35) (解析的に証明)	$\Rightarrow$	弱分離定理 (定理 3.36)
$\Downarrow$		Carathéodory の定理 (定理 3.40) $\Downarrow$
Farkas の補題 (定理 3.45)	$\Leftarrow$	有限錐が閉集合であること (定理 3.41)

- 教科書の「強分離定理 $\Rightarrow$ 弱分離定理」の証明の冒頭 (p.134) で, 「$\boldsymbol{y} \in \partial C$ であることから, $\boldsymbol{y}_k \notin \bar{C}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{y}$ となる点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ が存在します」とさらっと書いてあるが, これは全くもって非自明.

本講義の方針

Farkas の補題
(代数的に証明)

$\Downarrow$

弱分離定理

$\Downarrow$

強分離定理

Farkas の補題

命題 2.1 (Farkas の補題)

A を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である.

1. $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ.

$1 \Rightarrow 2$ はかんたん

- $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする.
- $y'A \geq 0$ ならば

$$y'b = y'(Ax) = (y'A)x \geq 0$$

$2 \Rightarrow 1$ (not $1 \Rightarrow$ not 2) の幾何的意味

- 「有限錐に対する分離定理」と見る.
- $K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ とおく.
- 条件 1 の否定「$Ax = b$, $x \geq 0$ なる x が存在しない」は「$b \notin K$」と同値.
- A の列ベクトルを $a^1, \ldots, a^n$ とおく ($A = (a^1, \ldots, a^n)$).
- 「$z \in K$」とは

  ある $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ に対して $z = x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n$ と書ける

  ということ.
- K は「$a^1, \ldots, a^n$ で張られる錐 (凸錐)」.

- $A \subset \mathbb{R}^m$ が錐 (cone) であるとは,

$$x \in A,\ \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \in A$$

が成り立つことをいう.

- $A \subset \mathbb{R}^m$ が凸錐 (convex cone) であるとは,

$$x, y \in A,\ \alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A$$

が成り立つことをいう.

- (「$\alpha \geq 0$」「$\alpha, \beta \geq 0$」の代わりに「$\alpha > 0$」「$\alpha, \beta > 0$」とする定義もある.)
- $K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ は凸錐.

- 条件 2 の否定「$y'A \geq 0$, $y'b < 0$ なる y が存在する」は

  「ある y ($\neq 0$) が存在して，錐 K と点 b が，原点を通り y を法線ベクトルとする超平面によって分離される」

  ということ.

Gale の定理

命題 2.2 (Gale の定理)
A を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \leq b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A = 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ．

Fourier-Motzkin 消去による Gale の定理の証明

- 例

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq -1 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

一般ケースの証明

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とする.
- $I^+ = \{i \mid a_{in} > 0\}$, $I^- = \{i \mid a_{in} < 0\}$, $I^0 = \{i \mid a_{in} = 0\}$ とする.
- すると，連立不等式 $Ax \leq b$ は

$$\begin{aligned} x_n &\leq f_i(x') && (i \in I^+) \\ g_j(x') &\leq x_n && (j \in I^-) \\ h_k(x') &\leq 0 && (k \in I^0) \end{aligned}$$

  の形に書きかえられる.
  ただし,
  - $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$
  - $f_i(x')$, $g_j(x')$, $h_k(x')$ は x' の何らかの 1 次式+定数項

- $Ax \le b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する，ということは,

$$\begin{aligned} g_j(x') &\le f_i(x') && (i \in I^+, j \in I^-) \\ h_k(x') &\le 0 && (k \in I^0) \end{aligned}$$

なる $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ が存在する，ということと同値.

(x_n が消去された！)

- ($\Leftarrow$: $\max_{j \in I^-} g_j(x') \le \min_{i \in I^+} f_i(x')$ ということなので，その間に入る数 (たとえば $\max_{j \in I^-} g_j(x')$) を x_n とすればよい．)

- 後者の連立不等式は，何らかの行列 A' とベクトル b' によって

$$A'x \le b'$$

と書ける.

- 以下，同様の作業を繰り返し $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ を消去していく.

- すると，以下のような同値な不等式の列を得る：

$$
\begin{array}{ll}
A^{(n)}x \le b^{(n)} & \quad (\text{そもそもの } Ax \le b) \\
\quad \Updownarrow & \\
A^{(n-1)}x \le b^{(n-1)} & \\
\quad \Updownarrow & \\
\quad \vdots & \\
\quad \Updownarrow & \\
A^{(1)}x \le b^{(1)} & \\
\quad \Updownarrow & \\
A^{(0)}x \le b^{(0)} &
\end{array}
$$

- ただし，各 $A^{(i-1)}x$ では $x_i, \ldots, x_n$ は消去されて登場しない.

  とくに最終行の $A^{(0)}x$ はゼロベクトルである.

- ここで，各ステップ $A^{(i)}x \leq b^{(i)} \to A^{(i-1)}x \leq b^{(i-1)}$ の変換は，ある非負行列 $T^{(i-1)}$ によって，

  $$T^{(i-1)}A^{(i)} = A^{(i-1)}, \qquad T^{(i-1)}b^{(i)} = b^{(i-1)}$$

  と表される.
  - 先の数値例では，$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
- よって，$T = T^{(0)}T^{(1)} \cdots T^{(n-1)}$ (非負行列) とおくと，最終行は $TAx \leq Tb$ と書ける.

  左辺の TA はゼロ行列である.
  - 先の数値例では，$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

- さて，条件 1 の否定「$Ax \leq b$ なる x は存在しない」を仮定すると，

  最終行の $TAx \leq Tb$ は偽の不等式ないといけない.

- 左辺はゼロベクトルなので，右辺のベクトルのうち少なくとも一つの要素が負でないといけない.

  それを第 i^* 要素とする.

- よって，T の第 i^* 行 (の転置) を y とすると，$y \geq 0$, $y'A = 0$, $y'b < 0$ が成り立つことになる.
  - 先の数値例では，$y = (1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})'$

- つまり，条件 2 の否定「$y \geq 0$, $y'A = 0$, $y'b < 0$ なる y が存在する」が導かれた.

Farkas の補題 (不等式版)

命題 2.3 (Farkas の補題—不等式版)

A を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である.

1. $Ax \leq b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0, \ y \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ.

Gale ⇒ Farkas (不等式版) の証明

- Farkas の補題 (不等式版) の条件 1
  「$Ax \leq b$, $x \geq 0$ なる x が存在する」は

  $Ax \leq b$, $-x \leq 0$ なる x が存在する

  と同値.

- 行列で書くと,
  $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ なる x が存在する.

- Gale の定理より, これは
  $$\begin{pmatrix} y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} = 0,\ y' \geq 0,\ z' \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$
  と同値.

- これは

  $y'A \geq 0,\ y' \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$

  と同値 (Farkas の補題 (不等式版) の条件 2).

Farkas (不等式版) ⇒ Farkas (等式版) の証明

- Farkas の補題 (等式版) の条件 1
  「$Ax = b$, $x \geq 0$ なる x が存在する」は

  $Ax \leq b$, $-Ax \leq -b$, $x \geq 0$ なる x が存在する

  と同値.

- 行列で書くと,

  $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ なる x が存在する.

- Farkas の補題 (不等式版) より，これは

  $$(y' \quad z') \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \geq 0,\ y' \geq 0,\ z' \geq 0 \Rightarrow (y' \quad z') \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \geq 0$$

  つまり

  $$(y - z)'A \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \Rightarrow (y - z)'b \geq 0$$

  と同値.

- これは $y'A \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ と同値 (Farkas の補題 (等式版) の条件 2).

Farkas の補題の特殊ケース

命題 2.4 (凸多面体の分離定理)

A を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax = b$, $\mathbf{1}'x = 1$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しない．
2. $y'A \gg (y'b)\mathbf{1}'$ なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

$1 \Rightarrow 2$ の幾何的意味

- 「凸多面体に対する分離定理」と見る.
- $C = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ とおく.
- 条件 1 は「$b \notin C$」と同値.
- A の列ベクトルを $a^1, \ldots, a^n$ とおく ($A = (a^1, \ldots, a^n)$).
- 「$z \in C$」とは

  ある $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$ に対して $z = x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n$ と書ける

  ということ.
- C は「$a^1, \ldots, a^n$ で張られる凸多面体」.

- 条件 2 「$y'a^1 > y'b, \ldots, y'a^n > y'b$ なる y が存在する」は

  「ある y $(\neq 0)$ が存在して，凸多面体 C と点 b が，y を法線ベクトルとする超平面によって分離される」

  ということ.

  (条件 2 が成り立つならば，「すべての $z \in C$ に対して $y'z > y'b$」が成り立つ．)

命題 2.4 の証明

- 条件 1 を行列で書くと,

  $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しない.

- Farkas の補題より, これは

  $\begin{pmatrix} y' & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} \geq 0$, $\begin{pmatrix} y' & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} < 0$ なる $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}$ が存在する

  と同値.

- すなわち,

  $-y'A \leq z\mathbf{1}'$, $z < -y'b$ なる $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}$ が存在する

  と同値.

- これは

  $-y'A \ll -(y'b)\mathbf{1}'$ なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する

  と同値 (条件 2).

Gordan の定理

命題 2.5 (Gordan の定理)

A を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A = 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ．

- 命題 2.4 で $b = 0$ とする．

Ville の定理

命題 2.6 (Ville の定理)
A を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \gg 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ．

Stiemke の定理

命題 2.7 (Stiemke の定理)

A を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である.

1. $Ax = 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'A = 0$ が成り立つ.

有限 Markov 連鎖の定常分布の存在

- $n \times n$ 正方行列 $A = (a_{ij})$ が
  - すべての i, j に対して $a_{ij} \geq 0$
  - すべての j に対して $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$

  を満たすとき，A を列確率行列 (column stochastic matrix)，あるいは列 Markov 行列 (column Markov matrix) という．
- 確率行列は有限 Markov 連鎖の遷移確率を表す：
  - a_{ij} は状態変数が j から i に移る確率
- $x \in \mathbb{R}^n$ が
  - すべての i に対して $x_i \geq 0$
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

  を満たすとき，x を確率ベクトルという．
- 確率ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ が $Ax = x$ を満たすとき，x を A の定常分布という．

命題 2.8
どんな確率行列に対しても定常分布が存在する.

- Farkas の補題 (の一種) を使って証明してみる.
- 他にも，Perron-Frobenius 定理や Brouwer の不動点定理を使った証明もある.

証明

- $(A-I)x=0$, $\mathbf{1}'x=1$, $x\geq 0$ なる x が存在することを示したい.
- そのような x が存在しなければ，Gordan の定理より,
  $y'(A-I)\gg 0$ (すなわち $y'A\gg y'$) なる y が存在する.
- そのような y に対して，j^* を $y_{j^*}\geq y_j$ (すべての j に対して) となるものとする.
- すると,

$$
\begin{aligned}
(y'A)_{j^*} &= \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij^*} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} y_{j^*} a_{ij^*} \quad (\because a_{ij^*}\geq 0 \text{ (すべての } i \text{ に対して))} \\
&= y_{j^*}\sum_{i=1}^{n} a_{ij^*} = y_{j^*} \quad (\because \sum_{i=1}^{n} a_{ij^*}=1)
\end{aligned}
$$

となるので，$y'A\gg y'$ と矛盾.

資産価格付けの理論

- 教科書 6.6 節–6.8 節, 『経出る』6.5.4 節
- 「現在」と「将来」の 2 期のみケースを考える.
- 将来の「状態」: $1, \dots, S$
- 証券: $j = 1, \dots, N$
- 各証券 j は収益ベクトル $d_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ \vdots \\ d_{Sj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^S$ で特徴付けられる.
- 収益行列:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{S1} & \cdots & d_{SN} \end{pmatrix}$$

- ポートフォリオ：$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$
  - $z_j > 0$：ロングポジション (買いポジション)
  - $z_j < 0$：ショートポジション (売りポジション)
- 状態 s での収益：$d_{s1}z_1 + \cdots + d_{sN}z_N$

  これを $s = 1, \ldots, S$ で並べたもの：$Dz \in \mathbb{R}^S$
- 証券価格ベクトル：$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$
- 支出額：$q'z$
- 初期保有：$0 \in \mathbb{R}^N$
- 予算制約：$q'z \leq 0$

無裁定価格

定義 2.1

- ポートフォリオ z が価格ベクトル q の下での裁定取引であるとは,

  $$q'z \leq 0,\ Dz \geq 0,\ [q'z \neq 0 \text{ または } Dz \neq 0]$$

  が成り立つことをいう.

- 価格ベクトル q が無裁定価格であるとは, q の下での裁定取引が存在しないことをいう.

- (教科書の定義 6.5 だと, 定理 6.2 は成り立たない.)

定義 2.2

- ポートフォリオ z が価格ベクトル q の下での強い意味での裁定取引であるとは,

  $$q'z < 0,\ Dz \geq 0$$

  が成り立つことをいう.

- 価格ベクトル q が弱い意味での無裁定価格であるとは, q の下での強い意味での裁定取引が存在しないことをいう.

資産価格付けの基本定理

命題 2.9

次の 2 つの条件は同値である.

1. q が無裁定価格である.
2. $\phi' D = q'$, $\phi \gg 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する.

- Stiemke の定理より.

命題 2.10

次の 2 つの条件は同値である.

1. q が弱い意味での無裁定価格である.
2. $\phi' D = q'$, $\phi \geq 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する.

- Farkas の補題そのもの.

命題 2.9 の証明

- 条件 2 「$\phi' D = q'$, $\phi \gg 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する」は

  $$\begin{pmatrix} x' & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} = 0,\ x \gg 0,\ w > 0$$ なる $x \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}$ が存在する

  と同値.

- Stiemke の定理より，これは

  $$\begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} z \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} z = 0$$

  と同値.

- すなわち，

  $$Dz \geq 0,\ q'z \leq 0 \Rightarrow Dz = 0,\ q'z = 0$$

  と同値.

- これは q が無裁定価格であること (条件 1) を意味する.

状態価格/リスク中立確率

- q が無裁定価格であるとする.
- $\Rightarrow \phi' D = q'$ なる $\phi \gg 0$ が存在する.
- ϕ を状態価格ベクトルという.
  - $q_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s d_{sj}$
  - ϕ_s は「状態 s の価値」を表していると見なせる.
- $\phi_0 = \sum_{s=1}^{S} \phi_s$ (> 0) とし, $\pi \in \mathbb{R}^S$ を

  $$\pi_s = \frac{\phi_s}{\phi_0}$$

  で定義する.

  π をリスク中立確率測度という.

- (解釈を与えるために) $d_1 = \mathbf{1}$ (無リスク証券) であるケースを考える.
- $q_1 = \sum_{s=1}^{S} \phi_s \times 1 = \phi_0$
- $q_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s d_{sj}$ より

$$\frac{q_j}{q_1} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{d_{sj}}{d_{s1}}$$

  - 将来時点での証券 j の (無リスク証券の収益に対する) 相対収益の π による期待値が，現在時点での証券 j の (無リスク証券の価格に対する) 相対価格に等しい.

オプションの価格付け

- 状態: $\{1,2\}$
- 証券
  - 株券 (リスク証券): (uS^0, dS^0), $\quad u > 1 > d$
  - 債券 (安全証券): (rB, rB), $\quad r > 1$

    $u > r$ ($> 1 > d$) とする.
  - コールオプション (派生証券): $(\max\{0, uS^0 - K\}, \max\{0, dS^0 - K\})$

    K: 権利行使価格

    「価格 K で株券を買うことができる権利」
- 証券価格ベクトル: $q = (S^0, B, q_3)$

  q が無裁定価格になるような q_3 を定めよ.

- 収益行列:

$$D = \begin{pmatrix} uS^0 & rB & \max\{0, uS^0 - K\} \\ dS^0 & rB & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix}$$

- 状態価格ベクトル ϕ:

$$\phi' D = q'$$

- 証券 $j = 1, 2$ について：

$$uS^0 \phi_1 + dS^0 \phi_2 = S^0$$

$$rB\phi_1 + rB\phi_2 = B$$

- この連立方程式の (一意) 解：

$$\phi_1 = \frac{r-d}{r(u-d)}, \ \phi_2 = \frac{u-r}{r(u-d)} \qquad (u > r > d \text{ より } > 0).$$

- 証券 $j = 3$ について：

$$q_3 = \phi_1 \max\{0, uS^0 - K\} + \phi_2 \max\{0, dS^0 - K\}.$$