

宿題 5

締切：5 月 22 日

1. 次の行列 A とベクトル b に対して、線形不等式 $Ax \leq b$ が解を持つか決定せよ。 ($Ax \leq b$ を満たすベクトル x を見つけるか、 $y'A = 0$, $y \geq 0$, $y'b < 0$ を満たすベクトル y を見つけるかする.)

$$(1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. 教科書の演習 6.9 で $p = 80$ とする.

(1) この場合、状態価格ベクトルは一意に定まるが、これを求めなさい (非負ベクトルではあるが正ベクトルではないことを確認しなさい).

(2) 教科書の定義 6.5 で定義するところの「無裁定」であることを示しなさい.
(したがって、「無裁定」を定義 6.5 で定義すると定理 6.2 が成り立たないことになる.)

(3) $-^tqx \geq 0$ かつ $Dx \geq 0$ かつ $Dx \neq 0$ を満たす x が存在することを示しなさい.
(したがって、 q は授業スライドの定義 2.2 で定義するところの「無裁定価格」ではない.)

3. 2 人標準形ゲームを考える. プレイヤー 1 の (純粋) 戦略集合を $S_1 = \{1, \dots, m\}$, プレイヤー 2 の (純粋) 戦略集合を $S_2 = \{1, \dots, n\}$ とする. また、プレイヤー 1 の利得行列を

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

とする. ここで、 u_{ij} はプレイヤー 1 が戦略 $i \in S_1$, プレイヤー 2 が戦略 $j \in S_2$ をとったときのプレイヤー 1 が得る利得である. (ここではプレイヤー 1 のインセンティブを議論したいので、プレイヤー 2 の利得を考える必要はない.) プレイヤー 1 の混合戦略の集合を $\Delta(S_1) = \{x \in \mathbb{R}_+^m \mid x_1 + \cdots + x_m = 1\}$, プレイヤー 2 の混合戦略の集合を $\Delta(S_2) = \{y \in \mathbb{R}_+^n \mid y_1 + \cdots + y_n = 1\}$ と書く.

プレイヤー 1 の純粋戦略 $i \in S_1$ が混合戦略 $x \in \Delta(S_1)$ に強支配されるとは

$$x'U \gg e_i'U$$

が成り立つことである。ただし、 $e_i \in \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の第 i 基本ベクトル (第 i 要素が 1 でそれ以外が 0 であるベクトル) である。

プレイヤー 1 の純粋戦略 $i \in S_1$ がプレイヤー 2 の混合戦略 $y \in \Delta(S_2)$ に対する最適反応であるとは、すべての $x \in \Delta(S_1)$ に対して

$$e_i'Uy \geq x'Uy$$

が成り立つことである。

このとき、次を示しなさい：

$i \in S_1$ がどんな $y \in \Delta(S_2)$ に対しても最適反応でなければ、ある $x \in \Delta(S_1)$ が存在して i は x に強支配される。

ヒント：(いろいろ方法はあるが、たとえば) Ville の定理 (授業スライドの命題 2.6) を使う。