

1. 比較静学

尾山 大輔

経済学のための数学

2025 年 4 月 17 日, 4 月 24 日, 5 月 1 日

パラメタ付きの等式制約付き最適化問題

$$\begin{aligned} (*) \quad & \max_x f(x, \alpha) \\ & \text{s.t. } g(x, \alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$(x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M)$$

- ▶ 最大値が存在するとして、それを $v(\alpha)$ と書くことにする。(最適価値関数)
- ▶ α が $\alpha = \bar{\alpha}$ から少し変化したら、最適解や v はどう変化するのか?
... 比較静学

- ▶ Lagrange の未定乗数法 :

$$L(x, \lambda, \alpha) = f(x, \alpha) + \lambda g(x, \alpha)$$

- ▶ 最適性の 1 階条件 :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \lambda, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \alpha) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, \alpha) = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda, \alpha) = g(x, \alpha) = 0$$

- ▶ 最適解が $x^*(\alpha) = (x_1^*(\alpha), \dots, x_N^*(\alpha))$, 対応する Lagrange 乗数が $\lambda^*(\alpha)$ と書けるとし, それぞれ微分可能であるとする.

(適切な仮定の下で成り立つ ... 「陰関数定理」)

- ▶ $v(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha) = L(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)$

- ▶ 合成関数の微分公式 (Chain Rule) より, 各 $j = 1, \dots, M$ について,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} L(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \\&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}(\alpha) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha_j}(\alpha) \\&\quad + \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \\&= \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) \quad (1 \text{ 階条件より}) \\&= \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha) + \lambda^*(\alpha) \frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha)\end{aligned}$$

... 包絡線公式

包絡線公式

命題 1.1

最適化問題 (*) の解を $x^*(\alpha)$, 対応する Lagrange 乗数を $\lambda^*(\alpha)$ とすると

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha) + \lambda^*(\alpha) \frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(x^*(\alpha), \alpha)$$

$$(j = 1, \dots, M)$$

例：効用最大化問題

$$\max_x u(x)$$

$$\text{s. t. } p \cdot x = I$$

$$(x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N, p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}_{++}^N, I \in \mathbb{R}_{++})$$

▶ $f(x, p, I) = u(x)$ (p, I に依存せず)

$$g(x, p, I) = I - p \cdot x$$

▶ 最適解： $x^*(p, I)$

対応する Lagrange 乗数： $\lambda^*(p, I)$

▶ 間接効用関数： $v(p, I)$ ($= u(x^*(p, I))$)

▶ 包絡線公式で, $\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial I} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial p_i} = -x_i$, $\frac{\partial g}{\partial I} = 1$ なので,

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, I) = -\lambda^*(p, I)x_i^*(p, I)$$

$$\frac{\partial v}{\partial I}(p, I) = \lambda^*(p, I)$$

命題 1.2

► Roy の等式

$$x_i^*(p, I) = - \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, I)}{\frac{\partial v}{\partial I}(p, I)}$$

► Houthakker の等式

$$\frac{x_i^*(p, I)}{x_j^*(p, I)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, I)}{\frac{\partial v}{\partial p_j}(p, I)}$$

“包絡線”

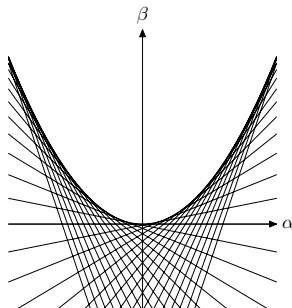
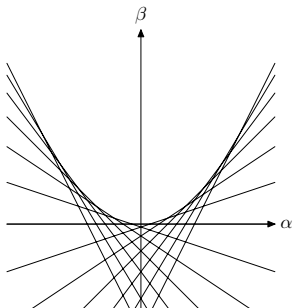
▶ 例： $f(x, \alpha) = -x^2 + \alpha x$

▶ x をパラメタと見て、 α - β 平面上の曲線 (直線)

$$\ell_x : \beta = x\alpha - x^2$$

を考える (傾き x).

▶ x をいろいろ動かしてみると：



- ▶ 直線群の包絡線：

$$\beta = v(\alpha) = \max_x f(x, \alpha)$$

(解を $x^*(\alpha)$ とする)

- ▶ 包絡線 $\beta = v(\alpha)$ は各 α において直線 $\ell_{x^*(\alpha)}$ と接している：

$$v'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*(\alpha), \alpha) = x^*(\alpha)$$

別の導出方法

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \max_x f(x, \alpha) \\ \text{s. t. } g(x, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

(公式の導出に、解関数の微分可能性は実は不要)

- ▶ $\alpha = \bar{\alpha}$ のときの最適解を $\bar{x}$ とおいて固定する.

$$(g(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0 \text{ かつ } v(\bar{\alpha}) = f(\bar{x}, \bar{\alpha}))$$

- ▶ $\alpha = \bar{\alpha}$ は次の最小化問題の解である：

$$\begin{aligned} (**) \quad \min_{\alpha} \quad & v(\alpha) - f(\bar{x}, \alpha) \\ \text{s. t. } \quad & g(\bar{x}, \alpha) = 0 \end{aligned}$$

- ▶ $\alpha = \bar{\alpha}$ は制約条件を満たす： $g(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0$
- ▶ $g(\bar{x}, \alpha) = 0$ ならば、 $v(\alpha) - f(\bar{x}, \alpha) \geq 0 = v(\bar{\alpha}) - f(\bar{x}, \bar{\alpha})$

- ▶ Lagrange 関数 :

$$L(\alpha, \mu) = v(\alpha) - f(\bar{x}, \alpha) - \mu g(\bar{x}, \alpha)$$

- ▶ 1 階条件 : 最適解 $\alpha = \bar{\alpha}$ は, ある $\bar{\mu}$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}) - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{x}, \bar{\alpha}) - \bar{\mu} \frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0 \quad (j = 1, \dots, M)$$

を満たす.

... 包絡線公式

- ▶ 使っている仮定 : $v(\alpha)$ の微分可能性

(+ $f(x, \alpha)$, $g(x, \alpha)$ の α に関する微分可能性 + Lagrange 法のための条件)

最適価値関数の微分可能性

- ▶ 最適価値関数は適切な条件なしでは微分可能とは限らない.

- ▶ 例

$$v(\alpha) = \max_x f(x, \alpha) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \alpha x - \frac{1}{4} \quad (-1 < \alpha < 1)$$

- ▶ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) = -(x+1)(x+\alpha)(x-1)$

- ▶ $v(\alpha) = \max\{f(-1, \alpha), f(1, \alpha)\} = \frac{2}{3}|\alpha|$

... $\alpha = 0$ で微分不可能

- ▶ $\alpha = 0$ では, 最適解は複数 ($x = -1, 1$).

包絡線 “定理”

- ▶ 包絡線定理は

- ▶ v が微分可能となる条件
- ▶ $\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}$ が満たす式 (包絡線公式)

を与えるもの.

- ▶ 多くの場合, v の微分可能性の仮定の下で後者を求めるのは容易.
前者が包絡線「定理」の実質的な内容.
- ▶ いろいろな十分条件の与え方が知られている.

包絡線定理の一例 (Oyama and Takenawa, 2018)

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \max_x f(x, \alpha) \\ \text{s. t. } & x \in X \end{aligned}$$

(制約条件が α に依存しないケース)

- ▶ $X^*(\alpha) = \{x \in X \mid v(\alpha) = f(x, \alpha)\}$ とする.
(解対応 (solution correspondence))

命題 1.3

1. $X^*(\alpha)$ がつねに非空で, α について「上半連続」である
2. $X^*(\bar{\alpha})$ は唯一の要素からなる ($\bar{x}$ とする)
3. $f(x, \alpha)$ は α について偏微分可能で, 各 $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x, \alpha)$ は (x, α) について連続である

とする. このとき,

- ▶ $v(\alpha)$ は $\alpha = \bar{\alpha}$ で微分可能で,
- ▶ 包絡線公式

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{x}, \bar{\alpha}) \quad (j = 1, \dots, M)$$

が成り立つ.

- ▶ 条件 1 は, X がコンパクトで $f(x, \alpha)$ が (x, α) について連続ならば成立.
- ▶ 条件 3 で, $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}$ の連続性の条件は落とせない. → Oyama and Takenawa

- ▶ X がパラメタに依存しないような最適化問題を考えているが、価格理論で出てくる最適価値関数

- ▶ 間接効用関数
- ▶ 支出関数
- ▶ 利潤関数
- ▶ 費用関数

に対してはこのバージョンで十分.

- ▶ たとえば、間接効用関数については、予算制約式をいずれかの x_i について解いて効用関数に代入すればよい.

練習問題

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2$$

1. 需要関数 $x^*(p, I)$, 間接効用関数 $v(p, I)$ を求めよ.
2. 補償需要関数 $h(p, t)$, 支出関数 $e(p, t)$ を求めよ.
3. Roy の等式と McKenzie の補題が成り立つことを確認せよ.

間接効用関数の性質

命題 1.4

間接効用関数 $v(p, I)$ は以下を満たす：

1. 0 次同次性： $v(\alpha p, \alpha I) = v(p, I)$ (すべての $\alpha > 0$ に対して)

2. $v(p, I)$ は I について増加, p_i について減少

効用関数 $u(x)$ が局所非飽和性を満たすならば, $v(p, I)$ は I について厳密に増加

3. $v(p, I)$ は準凸関数

▶ 局所非飽和性

どんな x と $\varepsilon > 0$ に対しても, $\|x' - x\| < \varepsilon$ なる x' が存在して $u(x') > u(x)$ が成り立つ.

凹関数・凸関数

定義 1.1

$X \subset \mathbb{R}^N$ が**凸集合** (convex set) であるとは, 任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して $(1 - \lambda)x + \lambda y \in X$ が成り立つことをいう.

定義 1.2

$X \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする.

- ▶ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が**凹関数** (concave function) であるとは, 任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

が成り立つことをいう.

- ▶ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が**凸関数** (convex function) であるとは, $-f$ が凹関数であることをいう.

定義 1.3

$X \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする.

- ▶ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が準凹関数 (quasi-concave function) であるとは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ が凸集合であることをいう.
- ▶ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が準凸関数 (quasi-convex function) であるとは, $-f$ が準凹関数であることをいう.

間接効用関数最小化問題

- ▶ $(p, I) = (\bar{p}, \bar{I})$ のときの最適解を $\bar{x}$ とおいて固定する.
- ▶ 次の問題を考える：

$$\begin{aligned} \min_{p, I} \quad & v(p, I) - u(\bar{x}) \\ \text{s. t.} \quad & p \cdot \bar{x} = I \end{aligned}$$

- ▶ $(p, I) = (\bar{p}, \bar{I})$ はこの問題の解である.
- ▶ p_i - I 平面, p_i - p_j 平面に図を書いて次を確かめよ：

- ▶ Roy の等式

$$\bar{x}_i = - \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\bar{p}, \bar{I})}{\frac{\partial v}{\partial I}(\bar{p}, \bar{I})}$$

- ▶ Houthakker の等式

$$\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} = \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\bar{p}, \bar{I})}{\frac{\partial v}{\partial p_j}(\bar{p}, \bar{I})}$$

支出最小化問題

$$\min_x p \cdot x$$

$$\text{s. t. } u(x) = t$$

$$(x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N, p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}_{++}^N, t \in \mathbb{R})$$

- ▶ 最適解： $h(p, t) \cdots$ 補償需要関数 (Hicks の需要関数)
- ▶ 最適価値関数： $e(p, t) \cdots$ 支出関数

命題 1.5 (McKenzie の補題)

$$\frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) = h_i(p, t)$$

証明

Lagrange 法を使った方法：

▶ $L(x, \mu) = p \cdot x + \mu(t - u(x))$

▶ 包絡線公式 (命題 1.1) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) &= \frac{\partial L}{\partial p_i}(h(p, t), \mu^*(p, t)) \\ &= x_i|_{x=h(p, t)} = h_i(p, t)\end{aligned}$$

別の方法：

▶ $(p, t) = (\bar{p}, \bar{t})$ のときの最適解を $\bar{h}$ として固定する.

▶ $p = \bar{p}$ は

$$\max_p e(p, \bar{t}) - p \cdot \bar{h}$$

の解である.

▶ 1 階条件より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial p_i} (e(p, \bar{t}) - p \cdot \bar{h}) \Big|_{p=\bar{p}} \\ &= \frac{\partial e}{\partial p_i} (\bar{p}, \bar{t}) - \bar{h}_i \end{aligned}$$

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2$$

$$1. \quad h_1(p_1, p_2, t) = \frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_1^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{\frac{t}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

$$h_2(p_1, p_2, t) = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_2^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{\frac{t}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

$$e(p_1, p_2, t) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{\frac{t}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

2. McKenzie の補題が成り立つことを確認せよ.

支出関数の微分可能性

- ▶ $e(p, t)$ は、支出最小化問題の解が一意であるとき、またそのときに限り、 p に関して微分可能である.

→ Oyama and Takenawa (2018)

支出関数の性質

命題 1.6

支出関数 $e(p, t)$ は以下を満たす：

1. p に関する 1 次同次性： $e(\alpha p, t) = \alpha e(p, t)$ (すべての $\alpha > 0$ に対して)
2. $e(p, t)$ は p_i について増加, t について厳密に増加
3. $e(p, t)$ は p について凹関数

- ▶ 性質 3 より, $e(p, t)$ が p に関して 2 回微分可能ならばそのヘッセ行列

$$D_p^2 e(p, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial p_1^2}(p, t) & \cdots & \frac{\partial^2 e}{\partial p_N \partial p_1}(p, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 e}{\partial p_1 \partial p_N}(p, t) & \cdots & \frac{\partial^2 e}{\partial p_N^2}(p, t) \end{pmatrix}$$

は半負定値 (negative semi-definite) である,

つまり, すべての $z \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$z^\top D_p^2 e(p, t) z \leq 0$$

が成り立つ. (あとで証明する.)

($\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i}(p, t)$ たちが p に関して連続ならば, $D_p^2 e(p, t)$ は対称行列である)

- ▶ 補償需要関数 $h(p, t)$ が p に関して連続微分可能であるとする.

$h(p, t)$ の p に関するヤコビ行列

$$D_p h(p, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p, t) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_N}(p, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_N}{\partial p_1}(p, t) & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial p_N}(p, t) \end{pmatrix}$$

(代替行列という)

- ▶ 命題 1.5 より, $D_p h(p, t) = D_p^2 e(p, t)$
- ▶ 命題 1.5 と命題 1.6 から次が成り立つ.

命題 1.7

代替行列 $D_p h(p, t)$ は以下を満たす :

- ▶ $D_p h(p, t)$ は半負定値
- ▶ $D_p h(p, t)$ は対称行列
- ▶ $D_p h(p, t)p = 0$

効用最大化問題と支出最小化問題の関係

1. $e(p, v(p, I)) = I$

$$h(p, v(p, I)) = x^*(p, I)$$

2. $v(p, e(p, t)) = t$

$$x^*(p, e(p, t)) = h(p, t)$$

効用最大化問題と支出最小化問題の関係 (厳密な議論)

- ▶ 絵を描いてみると当たり前に見えるので、厳密に証明してみる.
- ▶ 以下、効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする.
また、 $p \gg 0$ とする.

▶ 効用最大化問題

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^N} u(x)$$

$$\text{s. t. } p \cdot x \leq I$$

- ▶ $D(p, I)$: (p, I) の下での最適解の集合 (u の連続性より非空) $\dots$ 需要対応
- ▶ $v(p, I)$: (p, I) の下での最大値 (間接効用関数)

▶ 支出最小化問題

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^N} p \cdot x$$

$$\text{s. t. } u(x) \geq t$$

- ▶ $H(p, t)$: (p, t) の下での最適解の集合 (u の連続性より非空) $\dots$ 補償需要対応
- ▶ $e(p, t)$: (p, t) の下での最小値 (支出関数)

命題 1.8

効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする.

このとき $p \gg 0$, $I > 0$, $t > u(0)$ に対して次が成り立つ.

1. $p \cdot x < I$ ならば $u(x) < v(p, I)$
(u の局所非飽和性より)

したがって, すべての $x^* \in D(p, I)$ に対して $p \cdot x^* = I$

2. $u(x) > t$ ならば $p \cdot x > e(p, t)$
(u の連続性より)

したがって, すべての $h^* \in H(p, t)$ に対して $u(h^*) = t$

命題 1.9 (最適消費の双対性)

効用関数 u は連続で局所非飽和性を満たすとする.

このとき $p \gg 0$, $I > 0$, $t > u(0)$ に対して次が成り立つ.

1. $e(p, v(p, I)) = I$

$$H(p, v(p, I)) = D(p, I)$$

2. $v(p, e(p, t)) = t$

$$D(p, e(p, t)) = H(p, t)$$

証明

1.

- ▶ 命題 1.8 より, $p \cdot x < I \Rightarrow u(x) < v(p, I)$

対偶をとって, $u(x) \geq v(p, I) \Rightarrow p \cdot x \geq I$

これは $e(p, v(p, I)) \geq I$ を意味する.

- ▶ 任意に $x^* \in D(p, I)$ をとる.

すると, $p \cdot x^* \leq I$ かつ $u(x^*) = v(p, I)$ を満たす.

したがって, $e(p, v(p, I)) \leq p \cdot x^* \leq I$ であるが,

$e(p, v(p, I)) \geq I$ と合わせて $e(p, v(p, I)) = p \cdot x^* = I$ が成り立ち,

したがって, $x^* \in H(p, v(p, I))$ である.

- ▶ $x^* \in D(p, I)$ は任意だったので, $D(p, I) \subset H(p, v(p, I))$ が成り立つ.
- ▶ $(H(p, v(p, I)) \subset D(p, I)$ は最後に示す.)

2.

- ▶ 命題 1.8 より, $u(x) > t \Rightarrow p \cdot x > e(p, t)$

対偶をとって, $p \cdot x \leq e(p, t) \Rightarrow u(x) \leq t$

これは $v(p, e(p, t)) \leq t$ を意味する.

- ▶ 任意に $h^* \in H(p, t)$ をとる.

すると, $u(h^*) \geq t$ かつ $p \cdot h^* = e(p, t)$ を満たす.

したがって, $v(p, e(p, t)) \geq u(h^*) \geq t$ であるが, $v(p, e(p, t)) \leq t$ と合わせて $v(p, e(p, t)) = u(h^*) = t$ が成り立ち,

したがって, $h^* \in D(p, e(p, t))$ である.

- ▶ $h^* \in H(p, t)$ は任意だったので, $H(p, t) \subset D(p, e(p, t))$ が成り立つ.
- ▶ ($D(p, e(p, t)) \subset H(p, t)$ は最後に示す.)

- ▶ $H(p, t) \subset D(p, e(p, t)) \text{ ㊦ } t = v(p, I) \text{ とし㊦,}$
 $H(p, v(p, I)) \subset D(p, e(p, v(p, I))) = D(p, I).$
- ▶ $D(p, I) \subset H(p, v(p, I)) \text{ ㊦ } I = e(p, t) \text{ とし㊦,}$
 $D(p, e(p, t)) \subset H(p, v(p, e(p, t))) = H(p, t).$

Roy の等式と McKenzie の補題

- ▶ $v(p, e(p, t)) = t$ を p_i で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, e(p, t)) + \frac{\partial v}{\partial I}(p, e(p, t)) \frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) = 0 \quad (1)$$

- ▶ Roy から McKenzie を導く :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial p_i}(p, t) &= - \frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, e(p, t))}{\frac{\partial v}{\partial I}(p, e(p, t))} \quad ((1) \text{ より}) \\ &= x_i^*(p, e(p, t)) \quad (\text{Roy の等式より}) \\ &= h_i(p, t) \quad (\text{双対性}) \end{aligned}$$

► McKenzie から Roy を導く :

$$\begin{aligned}-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, I)}{\frac{\partial v}{\partial I}(p, I)} &= -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(p, e(p, v(p, I)))}{\frac{\partial v}{\partial I}(p, e(p, v(p, I)))} && \text{(双対性)} \\ &= \frac{\partial e}{\partial p_i}(p, v(p, I)) && \text{((1) より)} \\ &= h_i(p, v(p, I)) && \text{(McKenzie より)} \\ &= x_i^*(p, I) && \text{(双対性)}\end{aligned}$$

練習問題

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

1. 需要関数 $x^*(p, I)$, 間接効用関数 $v(p, I)$ を求めよ.
2. 補償需要関数 $h(p, t)$, 支出関数 $e(p, t)$ を求めよ.
3. 双対性が成り立つことを確認せよ.

Slutsky の等式

命題 1.10 (Slutsky の等式)

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(p, v(p, I)) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}(p, I) + \frac{\partial x_i^*}{\partial I}(p, I)x_j^*(p, I)$$

▶ 右辺を $s_{ij}(p, I)$ とおく :

$$s_{ij}(p, I) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}(p, I) + \frac{\partial x_i^*}{\partial I}(p, I)x_j^*(p, I)$$

▶ Slutsky 行列

$$S(p, I) = \begin{pmatrix} s_{11}(p, I) & \cdots & s_{1N}(p, I) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1}(p, I) & \cdots & s_{NN}(p, I) \end{pmatrix}$$

- ▶ Slutsky の等式 (行列表示)

$$\underbrace{D_p h(p, v(p, I))}_{\text{代替行列}} = \underbrace{S(p, I)}_{\text{Slutsky 行列}}$$

- ▶ $S(p, I)$: (原理上) 観察可能
 $D_p h(p, v(p, I))$: 数学対象物 (よい性質を持つ)
- ▶ Slutsky の等式と命題 1.7 から次が成り立つ.

命題 1.11

Slutsky 行列 $S(p, I)$ は以下を満たす :

- ▶ $S(p, I)$ は半負定値
- ▶ $S(p, I)$ は対称行列
- ▶ $S(p, I)p = 0$

命題 1.10 の証明

- ▶ 双対性より, すべての p, t に対して $h_i(p, t) = x_i^*(p, e(p, t))$ が成り立つ.
両辺をそれぞれ p_j で微分する.

練習問題

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

1. 需要関数 $x^*(p, I)$ を求めよ.
2. 補償需要関数 $h(p, t)$ を求めよ.
3. Slutsky の等式が成り立つことを確認せよ.

凹関数の微分による特徴付け (1 変数のケース)

- ▶ $I \subset \mathbb{R}$ を开区間とする.

命題 1.12

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は 2 回微分可能であるとする. 次の条件は同値である:

1. f は凹関数.
2. すべての $x, y \in I$ に対して $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.
3. f' は減少関数.
4. すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \leq 0$.

- ▶ 「1 $\Leftrightarrow$ 2」は, 多変数の場合も, $f'(x)$ を勾配ベクトル $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right)$ に置きかえることで成り立つ.

証明

1 $\Rightarrow$ 2

- ▶ f が凹関数であるとする. $x < y$ を任意にとる.

$x < z < y$ とし, $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ とする ($z = (1-\lambda)x + \lambda y$).

凹関数の定義より $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f(z)$ である.

- ▶ これより $\lambda(f(y) - f(x)) \leq f(z) - f(x)$ なので, すなわち

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

- ▶ $z \rightarrow x$ として $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(x)$, すなわち $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.

2 $\Rightarrow$ 3

- ▶ 1 より, $x < y$ ならば $f'(x) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq f'(y)$.

3 $\Rightarrow$ 1

- ▶ f' が減少関数であるとする. $x, y \in I$ と $\lambda \in (0, 1)$ を任意に固定する.
 $x < y$ と仮定する.

- ▶ $x < z < y$ なる z に対して

$$g(z) = f((1 - \lambda)x + \lambda z) - (1 - \lambda)f(x) - \lambda f(z)$$

を考える.

$g(y) \geq 0$ を示したい.

- ▶ まず $g(x) = 0$ である.

- ▶ また, 微分して

$$g'(z) = \lambda f'((1 - \lambda)x + \lambda z) - \lambda f'(z)$$

$(1 - \lambda)x + \lambda z < z$ なので $g'(z) \geq 0$ である.

- ▶ したがって $g(y) \geq 0$ を得る.

凹関数の微分による特徴付け (多変数のケース)

▶ $U \subset \mathbb{R}^N$ を開凸集合とする.

命題 1.13

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ は 2 回微分可能であるとする. 次の条件は同値である:

1. f は凹関数.
2. すべての $x \in U$ と $x + z \in U$ なる $z \in \mathbb{R}^N$ に対して $g(\lambda) = f(x + \lambda z)$ は凹関数.
3. すべての $x \in U$ に対して, x における f のヘッセ行列 $D^2f(x)$ は半負定値, すなわち, すべての $z \in \mathbb{R}^N$ に対して $z^T D^2f(x) z \leq 0$.

$$\text{▶ } D^2f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1}(x) & \cdots & f_{NN}(x) \end{pmatrix}$$

$$(\text{ただし } f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i})$$

証明

1 $\Leftrightarrow$ 2

► $\lambda, \lambda' \in [0, 1]$ と $t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} g((1-t)\lambda + t\lambda') &= f(x + ((1-t)\lambda + t\lambda')z) \\ &= f((1-t)(x + \lambda z) + t(x + \lambda' z)) \end{aligned}$$

と書けることより.

2 $\Leftrightarrow$ 3

- ▶ 1 変数関数 $g(\lambda)$ が凹関数であるための必要十分条件は $g''(\lambda) \leq 0$ である.
- ▶ $N = 2$ として $g'(\lambda)$, $g''(\lambda)$ を計算してみる :

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) \\ &= f_1(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1 + f_2(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2 \\ g''(\lambda) &= f_{11}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1^2 + f_{12}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_1 z_2 \\ &\quad + f_{21}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2 z_1 + f_{22}(x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2) z_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} z_1 + f_{12} z_2 \\ f_{21} z_1 + f_{22} z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= z^\top D^2 f(x + \lambda z) z \end{aligned}$$

利潤最大化問題

▶ 1 産出財のケース

生産関数 $f(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_M)$)

(一般の生産技術は「生産可能性集合」で表される.
一般ケースは分離定理を学ぶ際に扱う.)

▶ 利潤最大化問題

$$\max_{y, x} \quad py - w \cdot x$$

$$\text{s. t.} \quad y = f(x)$$

▶ 最適解

▶ $y^*(p, w)$: 供給関数

▶ $x^*(p, w)$: 要素需要関数

▶ 最適価値関数

$\pi(p, w)$: 利潤関数

包絡線公式

- ▶ $y = f(x)$ を代入して $\pi(p, w) = \max_x pf(x) - w \cdot x$
- ▶ 包絡線公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial p}(p, w) &= \frac{\partial}{\partial p}(pf(x) - w \cdot x) \Big|_{x=x^*(p, w)} \\ &= f(x)|_{x=x^*(p, w)} = f(x^*(p, w)) = y^*(p, w) \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_i}(p, w) &= \frac{\partial}{\partial w_i}(pf(x) - w \cdot x) \Big|_{x=x^*(p, w)} \\ &= -x_i|_{x=x^*(p, w)} = -x_i^*(p, w)\end{aligned}$$

命題 1.14 (Hotelling の補題)

$$\frac{\partial \pi}{\partial p}(p, w) = y^*(p, w), \quad \frac{\partial \pi}{\partial w_i}(p, w) = -x_i^*(p, w)$$

利潤関数の性質

命題 1.15

利潤関数 $\pi(p, w)$ は以下を満たす：

1. 1 次同次性： $\pi(\alpha p, \alpha w) = \alpha \pi(p, w)$ (すべての $\alpha > 0$ に対して)
2. $\pi(p, w)$ は p について増加, w_i について減少
3. $\pi(p, w)$ は凸関数

生産関数と利潤関数の双対性

- ▶ 簡単化のため, 1 投入財のケースを考える.

生産関数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}_+$)

- ▶ f は凹関数であるとする.
 - ▶ f は微分可能とする.
- ▶ 産出財を基準財として, $p = 1$ と基準化する.

$\pi(1, w)$ を $\pi(w)$ と書くことにする ($w \in \mathbb{R}_{++}$):

$$\pi(w) = \max_x f(x) - wx$$

- ▶ 利潤関数 $\pi(w)$ から生産関数 $f(x)$ を再現できる! $\rightarrow$

命題 1.16

$$f(x) = \min_w \pi(w) + wx$$

- ▶ 多投入財のケースでも成り立つ.
- ▶ 以下で f の微分可能性を仮定して証明するが,
実は不要 (「分離定理」を用いる).
- ▶ 「生産可能性集合」による一般のケースにおいても同様のことが成り立つ.
(「分離定理」を学ぶ際に扱う.)

証明

- ▶ 示したい等式の右辺を

$$g(x) = \min_w \pi(w) + wx$$

とおく. $g(x) = f(x)$ を示したい.

- ▶ まず, π の定義より

$$\pi(w) + wx \geq f(x) \quad (\text{すべての } w \text{ に対して})$$

なので, $g(x) \geq f(x)$ が成り立つ.

▶ 次に, 任意に $x = \bar{x}$ を固定して $\bar{w} = f'(\bar{x})$ とおく.

▶ f が凹関数であることより,

$$f(\bar{x}) + \bar{w}(x - \bar{x}) \geq f(x) \quad (\text{すべての } x \text{ に対して})$$

すなわち

$$f(\bar{x}) - \bar{w}\bar{x} \geq f(x) - \bar{w}x \quad (\text{すべての } x \text{ に対して})$$

が成り立つ.

▶ これは $\pi(\bar{w}) = f(\bar{x}) - \bar{w}\bar{x}$ を意味する.

▶ したがって,

$$g(\bar{x}) \leq \pi(\bar{w}) + \bar{w}\bar{x} = f(\bar{x})$$

が成り立つ.

例

▶ $f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$ (ただし $0 < \alpha < 1$)