

5. 一般均衡理論

尾山 大輔

経済学のための数学

2025 年 6 月 26 日, 7 月 3 日

一般均衡理論

- ▶ 定式化
- ▶ 競争均衡の定義
- ▶ 厚生経済学の第 1 基本定理
- ▶ 厚生経済学の第 2 基本定理
- ▶ 競争均衡の存在

経済全体の記述：一般均衡モデル

- ▶ 財 $n = 1, 2, \dots, N$
- ▶ 価格ベクトル $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$
- ▶ Price-taker の仮定
すべての主体は財の価格を所与として行動を決定する

企業の表現

- ▶ 企業 $j = 1, 2, \dots, J$
- ▶ 各企業の技術：「生産可能性集合」を用いて表す
 - ▶ $y^j = (y_1^j, y_2^j, \dots, y_N^j)$: 企業 j の生産計画
($y_n^j > 0 \Rightarrow$ 財 n は産出, $y_n^j < 0 \Rightarrow$ 財 n は投入)
 - ▶ (利潤) $= p_1 y_1^j + p_2 y_2^j + \dots + p_N y_N^j (= p \cdot y^j)$
 - ▶ Y^j : 企業 j の生産可能性集合
 - ▶ 例: $N = 2$, 第 1 財: 労働 ($L \geq 0$), 第 2 財: 生産財 ($y_2 \geq 0$)
企業 j の生産関数 $y_2 = F^j(L)$
企業 j の生産可能性集合 $Y^j = \{(y_1, y_2) \mid y_2 \leq F^j(-y_1)\}$
 - ▶ 企業 j の技術制約: $y^j \in Y^j$

企業の利潤最大化

- ▶ 企業 j の利潤最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{y^j} \quad & p \cdot y^j \\ \text{s. t.} \quad & y^j \in Y^j \end{aligned}$$

- ▶ y^{*j} が利潤最大化問題の解であるとは

- ▶ $y^{*j} \in Y^j$

- (y^{*j} は技術制約を満たす)

- ▶ $y^j \in Y^j \Rightarrow p \cdot y^{*j} \geq p \cdot y^j$

- (y^{*j} の利潤は、技術制約を満たすどんな生産計画 y^j の利潤よりも小さくない)

消費者の表現

- ▶ 消費者 $i = 1, 2, \dots, I$
- ▶ $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i)$: 消費者 i の消費計画
- ▶ u^i : 消費者 i の効用関数
- ▶ $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \dots, \omega_N^i)$: 初期保有ベクトル
- ▶ θ_{ij} : 企業 j の利潤のうちの, 消費者 i の所有割合 ($\theta_{1j} + \theta_{2j} + \dots + \theta_{Ij} = 1$)
- ▶ 消費者 i の予算制約

$$\text{支出} = p_1 x_1^i + \dots + p_N x_N^i (= p \cdot x^i)$$

$$\text{収入} = (p_1 \omega_1^i + \dots + p_N \omega_N^i) + (\theta_{i1} p \cdot y^1 + \dots + \theta_{iJ} p \cdot y^J)$$

$$= \underbrace{p \cdot \omega^i}_{\text{初期保有からの収入}} + \underbrace{\sum_{j=1}^J \theta_{ij} p \cdot y^j}_{\text{企業利潤からの収入}}$$

消費者の効用最大化

▶ 消費者 i の効用最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{x^i} \quad & u^i(x^i) \\ \text{s. t.} \quad & p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p \cdot y^j \end{aligned}$$

▶ x^{*i} が効用最大化問題の解であるとは

$$(W^i = p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p \cdot y^j \text{ とおくと})$$

$$\text{▶ } p \cdot x^{*i} \leq W^i$$

(x^{*i} は予算制約を満たす)

$$\text{▶ } p \cdot x^i \leq W^i \Rightarrow u^i(x^{*i}) \geq u^i(x^i)$$

(x^{*i} の効用は、予算制約を満たすどんな消費計画 x^i の効用よりも小さくない)

(後者は「 $u^i(x^{*i}) < u^i(x^i) \Rightarrow p \cdot x^i > W^i$ 」と同値)

経済全体の記述

私有財産制経済とは次の組のことである：

$$\mathcal{E} = ((u^i)_{i=1}^I, (Y^j)_{j=1}^J, (\omega^i, (\theta_{ij})_{j=1}^J)_{i=1}^I)$$

ただし

- ▶ u^i は消費者 i の効用関数
- ▶ Y^j は企業 j の生産可能性集合
- ▶ ω^i は消費者 i の初期保有ベクトル
- ▶ θ_{ij} は消費者 i の企業 j の利潤に対する請求権

配分の達成可能性

- ▶ 消費者たちの消費計画と企業たちの生産計画の組 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ を **配分** (allocation) という.
- ▶ 配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が**達成可能** (feasible) な配分であるとは、すべての企業 j について

$$y^j \in Y^j$$

が成り立ち、またすべての財 n について

$$\sum_{i=1}^I x_n^i = \sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y_n^j$$

が成り立つことをいう.

- ▶ 「(左辺) $\leq$ (右辺)」という不等号にする流儀もある.
- ▶ ここでは, (定理で必要になるときに明記するが) 生産可能性集合の自由処分性 (free disposal) を想定している.

競争均衡

価格ベクトルと配分の組 $(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が経済 $\mathcal{E}$ の競争均衡 (competitive equilibrium) であるとは、次の条件が成り立つことをいう：

1. [効用最大化] すべての消費者 i について、 x^{*i} は

$$\max_{x^i} u^i(x^i) \quad \text{s.t.} \quad p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

の解である.

2. [利潤最大化] すべての企業 j について、 y^{*j} は

$$\max_{y^j} p^* \cdot y^j \quad \text{s.t.} \quad y^j \in Y^j$$

の解である.

3. [需給一致] すべての財 n について、

$$\sum_{i=1}^I x_n^{*i} = \sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y_n^{*j}$$

が成り立つ.

- ▶ 「需給一致」の条件を「(需要) $\leq$ (供給)」という不等号にする流儀もある.
- ▶ ここでは, 生産可能性集合の自由処分性を想定している.

0 次同次性

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が競争均衡ならば、どんな $t > 0$ に対しても $(tp^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ は競争均衡である。

- ▶ 競争均衡では価格比のみが決まる。価格の絶対値は決まらない。
- ▶ 価格を一斉に t 倍しても、企業の最適生産計画は変わらない：

$$(\text{利潤}) = (tp^*) \cdot y^j = t(p^* \cdot y^j)$$

- ▶ 価格を一斉に t 倍しても、消費者の予算制約 (したがって最適消費計画) は変わらない：

$$(tp^*) \cdot x^{*i} \leq (tp^*) \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij}(tp^*) \cdot y^{*j}$$

Walras 法則

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ を競争均衡の定義のうち「効用最大化」「利潤最大化」の条件を満たすものとする.

- ▶ すべての消費者の効用関数が局所非飽和性を満たすならば,

$$p^* \cdot \sum_{i=1}^I x^{*i} = p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i + p^* \cdot \sum_{j=1}^J y^{*j}$$

が成り立つ.

- ▶ さらに, $p^* \gg 0$ (すべての価格が正) であるとする, N 個の市場のうち $N - 1$ 個の需給が一致すれば残りの 1 個の市場の需給も自動的に一致する.

- ▶ 各消費者 i の効用関数が局所非飽和性を満たすならば、最適消費計画 x^{*i} は予算制約を等式で満たす：

$$p^* \cdot x^i = p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

- ▶ 各辺を i について足し合わせると、

$$(\text{左辺}) = p^* \cdot \sum_{i=1}^I x^{*i}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j} \\ &= p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i + \sum_{j=1}^J \underbrace{\sum_{i=1}^I \theta_{ij}}_{=1} p^* \cdot y^{*j} \end{aligned}$$

$$= p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* \cdot y^{*j}$$

Pareto 効率性

- ▶ 配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ と $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ について,

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^i) \quad (\text{すべての消費者 } i \text{ について})$$

$$u^i(\hat{x}^i) > u^i(x^i) \quad (\text{ある消費者 } i \text{ について})$$

が成り立つとき,

- ▶ $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ は $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ より **Pareto 優位**にある, あるいは
- ▶ $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ は $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ を **Pareto 改善**する

という.

- ▶ 達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が **Pareto 効率的**であるとは, それより Pareto 優位にある達成可能な配分が存在しないことをいう.

厚生経済学の第 1 基本定理

命題 5.1

すべての消費者 i について u^i が局所非飽和性を満たすとする.

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が競争均衡ならば, $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ は Pareto 効率的である.

▶ 達成可能性を $\leq$ で定義するなら「 $p^* \geq 0$ 」が必要.

証明の準備

補題

u^i が局所非飽和性を満たすものとし、 x^{*i} が (p, W^i) の下での最適消費計画であるとする。このとき、

$$u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i}) \Rightarrow p \cdot x^i \geq W^i$$

が成り立つ。

証明 対偶を示す。

- ▶ $p \cdot x^i < W^i$ とすると、消費計画 x^i に十分近い消費計画 $\tilde{x}^i$ があって

$$p \cdot \tilde{x}^i \leq W^i \text{ かつ } u^i(x^i) < u^i(\tilde{x}^i)$$

とできる (局所非飽和性)。

- ▶ x^{*i} は最適消費計画であることより $u^i(\tilde{x}^i) \leq u^i(x^{*i})$ が成り立つので、合わせて $u^i(x^i) < u^i(x^{*i})$ となる。

厚生経済学の第1基本定理の証明

$(p^*, (x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ が競争均衡であるとする.

Step 1

任意の達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ に対して

$$\sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i = \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* y^j$$

が成り立つ.

Step 2

配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が競争均衡配分 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ より Pareto 優位にあり、かつ $(y^j)_{j=1}^J$ が達成可能 (すべての企業 j について $y^j \in Y^j$) ならば

$$\sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i > \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* \cdot y^j$$

が成り立つ.

- $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ より Pareto 優位にあり、
 $(y^j)_{j=1}^J$ が達成可能であるとする.

定義より,

- (i) すべての i について $u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i})$
- (ii) ある i について $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$

が成り立つ.

▶ x^{*i} の最適性より

$$u^i(x^i) > u^i(x^{*i}) \Rightarrow p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

が成り立つ. また, x^{*i} の最適性と u^i の局所非飽和性より

$$u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i}) \Rightarrow p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$$

が成り立つ (補題より).

▶ したがって, (i), (ii) より

(i') すべての i について $p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$

(ii') ある i について $p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^{*j}$

が成り立つ.

- ▶ y^{*j} の最適性と $y^j \in Y^j$ より

$$p^* \cdot y^{*j} \geq p^* \cdot y^j$$

が成り立つ.

- ▶ したがって, (i'), (ii') より

(i'') すべての i について $p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^j$

(ii'') ある i について $p^* \cdot x^i > p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p^* \cdot y^j$

が成り立つ.

- ▶ ここで, (i'') の両辺を i について足し合わせると, (ii'') より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I p^* \cdot x^i &> \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \underbrace{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \theta_{ij} p^* \cdot y^j}_{=1} \\ &= \sum_{i=1}^I p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^J p^* \cdot y^j \end{aligned}$$

となる.

Step 3

Step 1 と Step 2 より, 「配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ が競争均衡配分 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ より Pareto 優位にあるならば, それは達成可能でない」ということなので, $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ は Pareto 効率的であることが示された.

- ▶ 「局所非飽和性」は外せない.

飽和するケースでは結論は一般に成り立たない.

(無差別“曲線”が厚みを持つ場合.)

- ▶ これら以外の仮定はいらない. (「連続性」「準凹性」「凸性」など.)

価格準均衡

価格ベクトルと配分の組 $(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ (ただし $p^* \neq 0$) が経済 $\mathcal{E}$ の **価格準均衡** (price quasi-equilibrium) であるとは、次の条件が成り立つことをいう：

1. [支出最小化] すべての消費者 i について、 x^{*i} は

$$u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i}) \Rightarrow p^* \cdot x^i \geq p^* \cdot x^{*i}$$

を満たす.

2. [利潤最大化] すべての企業 j について、 y^{*j} は

$$\max_{y^j} p^* \cdot y^j \quad \text{s. t. } y^j \in Y^j$$

の解である.

3. [需給一致] すべての財 n について、

$$\sum_{i=1}^I x_n^{*i} = \sum_{i=1}^I \omega_n^i + \sum_{j=1}^J y_n^{*j}$$

が成り立つ.

厚生経済学の第2基本定理

命題 5.2

以下を仮定する：

- (a) すべての消費者 i に対して、 u^i は準凹関数である。
- (b) すべての企業 j に対して、 Y^j は凸集合である。
- (c) どんな達成可能な配分 $((x^i)_{i=1}^I, (y^j)_{j=1}^J)$ においても、消費者 i と財 ℓ が存在して、どんな $\delta > 0$ に対しても $\varepsilon \in (0, \delta]$ が存在して $u^i(x^i + \varepsilon e_\ell) > u^i(x^i)$ が成り立つ。
- (d) 経済全体の生産可能性集合 $Y = \sum_{j=1}^J Y^j + \{\sum_{i=1}^I \omega^i\}$ は自由処分性 $(Y - \mathbb{R}_+^N \subset Y)$ を満たす。

このとき、達成可能な配分 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ がパレート効率的ならば、価格ベクトル $p^* \geq 0$, $p^* \neq 0$ が存在して $(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ が価格準均衡になる。

- ▶ 仮定 (c)：神取『ミクロ経済学の力』補論 D での仮定 (を少々弱めたもの) を採用

厚生経済学の第2基本定理の証明

$((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ が Pareto 効率的な達成可能な配分であるとする.

Step 1

- ▶ 各消費者 i に対して

$$X^i = \{x^i \in \mathbb{R}_+^N \mid u^i(x^i) \geq u^i(x^{*i})\}$$

とすると, 仮定 (a) より X^i は凸集合.

- ▶ $X = \sum_{i=1}^I X^i$ とすると, X は凸集合.

Step 2

- ▶ 仮定 (b) より $Y = \sum_{j=1}^J Y^j + \{\sum_{i=1}^I \omega^i\}$ は凸集合.

Step 3

Pareto 効率性と仮定 (c)–(d) より

$$(Y - X) \cap \mathbb{R}_{++}^N = \emptyset$$

- ▶ $z \in Y - X$ なる $z \in \mathbb{R}_{++}^N$ が存在するとする (背理法の仮定).

何らかの達成可能な配分 $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ が存在して
 $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ より Pareto 優位にあることを示す.

- ▶ 背理法の仮定より, ある $z \in \mathbb{R}_{++}^N$ と $x^i \in X^i, i = 1, \dots, I,$
 $y^j \in Y^j, j = 1, \dots, J$ が存在して,

$$\sum_{i=1}^I x^i = \sum_{j=1}^J y^j + \sum_{i=1}^I \omega^i - z \tag{1}$$

が成り立つ.

- ▶ 仮定 (d) より, ある $\tilde{y}^j \in Y^j, j = 1, \dots, J$ が存在して

$$\sum_{j=1}^J \tilde{y}^j + \sum_{i=1}^I \omega^i = \sum_{j=1}^J y^j + \sum_{i=1}^I \omega^i - z$$

が成り立つ.

したがって, $((x^i)_{i=1}^I, (\tilde{y}^j)_{j=1}^J)$ は達成可能な配分である.

- ▶ 仮定 (c) より, ある消費者 κ と財 ℓ と $\varepsilon \in (0, z_\ell]$ が存在して

$$u^\kappa(x^\kappa + \varepsilon e_\ell) > u^\kappa(x^\kappa) \quad (2)$$

が成り立つ.

- ▶ 仮定 (d) より, ある $\hat{y}^j \in Y^j, j = 1, \dots, J$ が存在して

$$\sum_{j=1}^J \hat{y}^j + \sum_{i=1}^I \omega^i = \sum_{j=1}^J y^j + \sum_{i=1}^I \omega^i - (z - \varepsilon e_\ell) \quad (3)$$

が成り立つ.

▶ ここで,

▶ $\hat{x}^i = x^i \quad (i \neq \kappa)$

▶ $\hat{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon e_\ell$

とする.

▶ すると,

▶ $((\hat{x}^i)_{i=1}^I, (\hat{y}^j)_{j=1}^J)$ は達成可能 ((1) と (3) より)

▶ $u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^{*i}) \quad (i \neq \kappa) \quad (x^i \in X^i \text{ より})$

▶ $u^\kappa(\hat{x}^\kappa) > u^\kappa(x^{*\kappa}) \quad (x^\kappa \in X^\kappa \text{ と (2) より})$

▶ これは $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ が Pareto 効率的であることに矛盾.

Step 4

- ▶ 命題 4.6 (非負ベクトルによる分離定理) より, ある $p^* \geq 0, p^* \neq 0$ が存在して

$$p^* \cdot z \leq 0 \quad (\text{すべての } z \in Y - X \text{ に対して})$$

が成り立つ,

- ▶ すなわち,

$$p^* \cdot \sum_{j=1}^J y^j + p^* \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i \leq p^* \cdot \sum_{i=1}^I x^i$$

(すべての $x^i \in X^i, i = 1, \dots, I, y^j \in Y^j, j = 1, \dots, J$ に対して) (4)

が成り立つ.

Step 5

$(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J))$ は価格準均衡である.

- ▶ $((x^{*i})_{i=1}^I, (y^{*j})_{j=1}^J)$ はそもそも達成可能なので, 需給一致が成り立つ.
- ▶ 支出最小化 :
 - ▶ $x^i \in X^i$ を任意にとる.
 - ▶ (4) に $x^k = x^{*k}$, $k \neq i$, y^{*j} , $j = 1, \dots, J$ を代入したものと $\sum_{i=1}^I x^{*i} = \sum_{j=1}^J y^{*j} + \sum_{i=1}^I \omega^i$ より $p^* \cdot x^{*i} \leq p^* \cdot x^i$ を得る.
- ▶ 利潤最大化 :
 - ▶ $y^j \in Y^j$ を任意にとる.
 - ▶ (4) に $x^i = x^{*i}$, $i = 1, \dots, I$, y^{*k} , $k \neq j$ を代入したものと $\sum_{i=1}^I x^{*i} = \sum_{j=1}^J y^{*j} + \sum_{i=1}^I \omega^i$ より $p^* \cdot y^j \leq p^* \cdot y^{*j}$ を得る.

競争均衡の存在

- ▶ 簡単な設定において示すことにする.
- ▶ $\sum_{i=1}^I \omega^i \gg 0$
- ▶ $J = 1, Y^1 = -\mathbb{R}_+^N$
 - ▶ 財を捨ててくれるだけの存在
- ▶ $(p^*, ((x^{*i})_{i=1}^I, y^{*1}))$ が競争均衡ならば
 - ▶ $y^{*1} \leq 0$
 - ▶ $p^* \geq 0$
 - ▶ $p^* \cdot y^{*1} = 0$
- ▶ 実質的には、自由処分を許す「純粋交換経済」.

純粋交換経済

$(p^*, (x^{*i})_{i=1}^I)$ が純粋交換経済 $\mathcal{E} = ((u^i)_{i=1}^I, (\omega^i)_{i=1}^I)$ の競争均衡であるとは次の条件が成り立つことをいう：

1. [非負価格] $p^* \geq 0$

2. [効用最大化] すべての消費者 i について、 x^{*i} は

$$\max_{x^i} u^i(x^i) \quad \text{s.t.} \quad p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot \omega^i$$

の解である.

3. [需給一致] すべての財 n について,

$$\sum_{i=1}^I x_n^{*i} \leq \sum_{i=1}^I \omega_n^i$$

が成り立つ.

4. [相補性] $p^* \cdot \left(\sum_{i=1}^I x^{*i} - \sum_{i=1}^I \omega^i \right) = 0$

仮定

(a) 各 i に対して, u^i は連続関数

⇒ $p \gg 0$ に対して, 効用最大化問題の解が存在

(b) 各 i に対して, u^i は強い意味の準凹関数

どんな t に対しても, $u^i(x^i) \geq t$, $u^i(\hat{x}^i) \geq t$ ならば, すべての $\lambda \in (0, 1)$ に対して $u^i((1 - \lambda)x^i + \lambda\hat{x}^i) > t$

⇒ 最適解は高々一つ

⇒ (連続性と合わせて) 最適解は $p \gg 0$ の連続関数

… $d^i(p)$ と書くことにする

(c) 各 i に対して, u^i は局所非飽和性を満たす

⇒ Walras 法則 $p \cdot (\sum_{i=1}^I d^i(p) - \sum_{i=1}^I \omega^i) = 0$ が成り立つ

超過需要関数

- ▶ $z^i(p) = d^i(p) - \omega^i$
- ▶ $z(p) = \sum_{i=1}^I z^i(p)$
... 超過需要関数 (excess demand function)
- ▶ $\mathbb{R}_{++}^N$ 上で
 - ▶ [連続性] $z^i(p)$ は連続関数 (仮定 (a), (b) より)
 - ▶ [0 次同次性] すべての $\alpha > 0$ に対して $z^i(\alpha p) = z^i(p)$
 - ▶ [Walras 法則] $p \cdot z(p) = 0$ (仮定 (c) より)
- ▶ $(p^*, (d^i(p^*))_{i=1}^I), p^* \in \mathbb{R}_{++}^N$ が競争均衡であるための必要十分条件は $z(p^*) \leq 0$.

ゼロ価格に関する仮定

- (d) 各 i に対して, $d^i(p)$ はすべての $p \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ に対して (有限の値として) 定義され, $\mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ 全域で連続関数
- ▶ u^i が厳密に増加関数だと成り立たない.
 - ▶ この仮定の下で, Walras 法則はすべての $p \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ に対して成り立つ.
 - ▶ $(p^*, (d^i(p^*))_{i=1}^I)$, $p^* \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ が競争均衡であるための必要十分条件は $z(p^*) \leq 0$.

競争均衡の存在 I

命題 5.3

純粋交換経済 $\mathcal{E} = ((u^i)_{i=1}^I, (\omega^i)_{i=1}^I)$ が仮定 (a)–(d) を満たすとする. このとき $\mathcal{E}$ の競争均衡が存在する.

- ▶ 次の「不動点定理」を使う.

Brouwer の不動点定理

定理 5.4

$X \subset \mathbb{R}^N$ を非空コンパクト凸集合, f を X から X への連続関数とする.
このとき, f の不動点, すなわち $f(x^*) = x^*$ なる点 $x^* \in X$ が存在する.

- ▶ X がコンパクトでなかったら?
- ▶ X が凸でなかったら?
- ▶ f が連続でなかったら?

競争均衡の存在証明 I

- ▶ $z(p^*) \leq 0$ なる $p^* \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ が存在することを示せばよい.
- ▶ $\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^N \mid p_1 + \cdots + p_N = 1\}$ とする.
... 非空コンパクト凸集合
- ▶ Δ の範囲で $z(p^*) \leq 0$ なる p^* が存在することを示す.
- ▶ $z_n^+(p) = \max\{z_n(p), 0\}$ と書く.
- ▶ $z_n^+(p)$ は連続関数.
- ▶ 関数 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ を

$$f_n(p) = \frac{p_n + z_n^+(p)}{\sum_{\ell=1}^N (p_\ell + z_\ell^+(p))} \quad (n = 1, \dots, N)$$

で定義する.

f はコンパクト凸集合 Δ からそれ自身への連続関数である.

- Brouwer の不動点定理より, f は不動点 $p^* \in \Delta$ を持つ :

$$p_n^* = \frac{p_n^* + z_n^+(p^*)}{\sum_{\ell=1}^N (p_\ell^* + z_\ell^+(p^*))} \quad (n = 1, \dots, N)$$

- Walras 法則より,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{n=1}^N p_n^* z_n(p^*) &= \frac{\sum_{n=1}^N (p_n^* z_n(p^*) + z_n^+(p^*) z_n(p^*))}{\sum_{\ell=1}^N (p_\ell^* + z_\ell^+(p^*))} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N z_n^+(p^*) z_n(p^*)}{\sum_{\ell=1}^N (p_\ell^* + z_\ell^+(p^*))} \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\sum_{n=1}^N z_n^+(p^*) z_n(p^*) = 0 \tag{5}$$

が成り立つ.

▶ ここで,

$$z_n^+(p^*)z_n(p^*) = \begin{cases} z_n(p^*)^2 > 0 & (z_n(p^*) > 0 \text{ ならば}) \\ 0 & (z_n(p^*) \leq 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

なので, (5) より

$$z_n(p^*) \leq 0 \quad (\text{すべての } n = 1, \dots, N \text{ に対して})$$

が従う.

単調性の仮定

- ▶ 仮定 (d) を外し，局所非飽和性を次の条件に強める：
- (e) 各 i に対して， u^i は厳密に単調増加
 $(x^i \geq y^i, x^i \neq y^i \text{ ならば } u^i(x^i) > u^i(y^i))$
- ▶ この仮定の下で， $p_n \rightarrow 0$ ならば $z_n(p) \rightarrow \infty$.
- ▶ p^* が競争均衡価格ベクトルであるための必要十分条件は $p^* \gg 0$ かつ $z(p^*) \leq 0$ (したがって $z(p^*) = 0$).

競争均衡の存在 II

命題 5.5

純粋交換経済 $\mathcal{E} = ((u^i)_{i=1}^I, (\omega^i)_{i=1}^I)$ が仮定 (a), (b), (e) を満たすとする. このとき $\mathcal{E}$ の競争均衡が存在する.

- ▶ 次の「不動点定理」を使う.

角谷の不動点定理

定理 5.6

$X \subset \mathbb{R}^N$ を非空コンパクト凸集合, F を X から X への対応 (correspondence) で次を満たすものとする:

- ▶ すべての $x \in X$ に対して, $F(x)$ は非空凸集合.
- ▶ F のグラフ $\{(x, y) \in X \times X \mid y \in F(x)\}$ は閉集合.

このとき, F の不動点, すなわち $x^* \in F(x^*)$ なる点 $x^* \in X$ が存在する.

- ▶ 関数 $f: X \rightarrow X$ を $F(x) = \{f(x)\}$ という対応と見なすと, 上の性質が成り立つための必要十分条件は f が連続であること.
- ▶ $F(x)$ が凸集合とは限らなかったら?

競争均衡の存在証明 II

- ▶ コンパクト凸集合 $\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^N \mid p_1 + \cdots + p_N = 1\}$ の範囲で $z(p^*) \leq 0$ なる p^* が存在することを示す.

- ▶ $\Delta^\circ = \{p \in \Delta \mid p_n > 0 \text{ (すべての } n = 1, \dots, N \text{ に対して)}\}$

$$z^{\max}(p) = \max\{z_1(p), \dots, z_N(p)\}$$

と書くことにする.

- ▶ $z^{\max}(p)$ は Δ° 上で連続関数.

- ▶ 対応 $F: \Delta \rightarrow \Delta$ を

$$F(p) = \begin{cases} \{q \in \Delta \mid z_n(p) < z^{\max}(p) \Rightarrow q_n = 0\} & (p \in \Delta^\circ \text{ ならば}) \\ \{q \in \Delta \mid p_n > 0 \Rightarrow q_n = 0\} & (p \in \Delta \setminus \Delta^\circ \text{ ならば}) \end{cases}$$

で定義する.

- ▶ すべての $p \in \Delta$ に対して, $F(p)$ は非空凸集合である.

主張

F のグラフは閉集合である.

- ▶ $\{(p^m, q^m)\}$ を $q^m \in F(p^m)$ を満たす $X \times X$ 内の点列とし,
 $\lim_{m \rightarrow \infty} (p^m, q^m) = (\bar{p}, \bar{q})$ とする.
 $\bar{q} \in F(\bar{p})$ となることを示したい.
- ▶ $\bar{p} \in \Delta^\circ$ のとき:
 $z_n(\bar{p}) < z^{\max}(\bar{p})$ とする.
- ▶ 十分大きな m に対して, $p^m \in \Delta^\circ$ であり, z の連続性より
 $z_n(p^m) < z^{\max}(p^m)$ なので, $q^m \in F(p^m)$ より $q_n^m = 0$ である.
- ▶ したがって, $\bar{q}_n = 0$ である.
- ▶ よって, $\bar{q} \in F(\bar{p})$ が成り立つ.

▶ $\bar{p} \in \Delta \setminus \Delta^\circ$ のとき :

$\bar{p}_n > 0$ とする.

▶ 十分大きな m に対して, $p_n^m > 0$ である.

▶ $p^m \in \Delta \setminus \Delta^\circ$ ならば, $q^m \in F(p^m)$ より $q_n^m = 0$ である.

▶ $p^m \in \Delta^\circ$ ならば,

$$p_n^m z_n(p^m) \leq p_n^m \sum_{i=1}^I d_n^i(p^m) \leq p^m \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i(p^m) \leq \max_{\ell} \sum_{i=1}^I \omega_{\ell}^i(p^m)$$

で, m が十分大きければ $p_n^m \approx \bar{p}_n > 0$ なので, $z_n(p^m)$ は近似的に $\max_{\ell} \sum_{i=1}^I \omega_{\ell}^i(p^m) / \bar{p}_n$ で上からおさえられる.

▶ 一方, 何らかの ℓ に対して $p_{\ell}^m \rightarrow 0$ なので, u^i の単調性より $z^{\max}(p^m) \rightarrow \infty$ である.

- ▶ よって、十分大きい m に対して $z_n(p^m) < z^{\max}(p^m)$ が成り立ち、したがって $q^m \in F(p^m)$ より $q_n^m = 0$ である.
- ▶ したがって、 $\bar{q}_n = 0$ である.
- ▶ よって、 $\bar{q} \in F(\bar{p})$ が成り立つ.

(主張の証明終)

- ▶ したがって、角谷の不動点定理より F は不動点 $p^* \in \Delta$ を持つ：
 $p^* \in F(p^*)$.

- ▶ F の定義より、 $p^* \in \Delta^\circ$ でないといけないが、Walras 法則より

$$z^{\max}(p^*) = p^* \cdot z(p^*) = 0$$

が成り立ち、したがって $z(p^*) \leq 0$ である.

- ▶ すなわち p^* は競争均衡価格ベクトルである.