# 2. 分離定理 I

尾山 大輔

経済学のための数学

2025 年 5 月 8 日，15 日，22 日

# ふつうの方針 (教科書の方針)

| | | |
|---|---|---|
| 強分離定理 (定理 3.35)<br>(解析的に証明) | $\Rightarrow$ | 弱分離定理 (定理 3.36) |
| $\Downarrow$ | | Carathéodory の定理 (定理 3.40)<br>$\Downarrow$ |
| Farkas の補題 (定理 3.45) | $\Leftarrow$ | 有限錐が閉集合であること (定理 3.41) |

- 教科書の「強分離定理 $\Rightarrow$ 弱分離定理」の証明の冒頭 (p.134) で，「$\boldsymbol{y} \in \partial C$ であることから，$\boldsymbol{y}_k \notin \bar{C}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{y}$ となる点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ が存在します」とさらっと書いてあるが，これは全くもって非自明.

# 本講義の方針

Farkas の補題
(代数的に証明)

$\Downarrow$

弱分離定理

$\Downarrow$

強分離定理

# Farkas の補題

**命題 2.1 (Farkas の補題)**

$A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ．

## $1 \Rightarrow 2$ はかんたん

- $Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする.
- $y'A \geq 0$ ならば

$$y'b = y'(Ax) = (y'A)x \geq 0$$

## $2 \Rightarrow 1$ (not 1 $\Rightarrow$ not 2) の幾何的意味

- 「有限錐に対する分離定理」と見る.
- $K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ とおく.
- 条件 1 の否定「$Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x$ が存在しない」は「$b \notin K$」と同値.
- $A$ の列ベクトルを $a^1, \ldots, a^n$ とおく ($A = (a^1, \ldots, a^n)$).
- 「$z \in K$」とは

  ある $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ に対して $z = x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n$ と書ける

  ということ.
- $K$ は「$a^1, \ldots, a^n$ で張られる錐 (凸錐)」.

- $A \subset \mathbb{R}^m$ が錐 (cone) であるとは,

$$x \in A,\ \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \in A$$

が成り立つことをいう.

- $A \subset \mathbb{R}^m$ が凸錐 (convex cone) であるとは,

$$x, y \in A,\ \alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A$$

が成り立つことをいう.

- (「$\alpha \geq 0$」「$\alpha, \beta \geq 0$」の代わりに「$\alpha > 0$」「$\alpha, \beta > 0$」とする定義もある.)

- $K = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ は凸錐.

- 条件 2 の否定「$y'A \geq 0$, $y'b < 0$ なる $y$ が存在する」は

  「ある $y$ ($\neq 0$) が存在して，錐 $K$ と点 $b$ が，原点を通り $y$ を法線ベクトルとする超平面によって分離される」

  ということ．

# Gale の定理

**命題 2.2 (Gale の定理)**
$A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \leq b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A = 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ．

- 例

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq -1 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

# 一般ケースの証明

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とする.
- $I^+ = \{i \mid a_{in} > 0\}$, $I^- = \{i \mid a_{in} < 0\}$, $I^0 = \{i \mid a_{in} = 0\}$ とする.
- すると，連立不等式 $Ax \leq b$ は

$$
\begin{aligned}
x_n &\leq f_i(x') & &(i \in I^+) \\
g_j(x') &\leq x_n & &(j \in I^-) \\
h_k(x') &\leq 0 & &(k \in I^0)
\end{aligned}
$$

  の形に書きかえられる.
  ただし,
  - $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$
  - $f_i(x')$, $g_j(x')$, $h_k(x')$ は $x'$ の何らかの 1 次式+定数項

- $Ax \le b$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する，ということは，

$$
\begin{aligned}
g_j(x') &\le f_i(x') && (i \in I^+, j \in I^-) \\
h_k(x') &\le 0 && (k \in I^0)
\end{aligned}
$$

  なる $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ が存在する，ということと同値.

  ($x_n$ が消去された！)

- ($\Leftarrow$: $\max_{j \in I^-} g_j(x') \le \min_{i \in I^+} f_i(x')$ ということなので，その間に入る数 (たとえば $\max_{j \in I^-} g_j(x')$) を $x_n$ とすればよい．)

- 後者の連立不等式は，何らかの行列 $A'$ とベクトル $b'$ によって

$$
A'x \le b'
$$

  と書ける.

- 以下，同様の作業を繰り返し $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ を消去していく.

- すると，以下のような同値な不等式の列を得る：

$$A^{(n)}x \le b^{(n)} \qquad (\text{そもそもの } Ax \le b)$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{(n-1)}x \le b^{(n-1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vdots$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{(1)}x \le b^{(1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{(0)}x \le b^{(0)}$$

- ただし，各 $A^{(i-1)}x$ では $x_i, \ldots, x_n$ は消去されて登場しない.

  とくに最終行の $A^{(0)}x$ はゼロベクトルである.

- ここで，各ステップ $A^{(i)}x \leq b^{(i)} \to A^{(i-1)}x \leq b^{(i-1)}$ の変換は，ある非負行列 $T^{(i-1)}$ によって，

$$T^{(i-1)}A^{(i)} = A^{(i-1)}, \qquad T^{(i-1)}b^{(i)} = b^{(i-1)}$$

  と表される.
  - 先の数値例では，$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
- よって，$T = T^{(0)}T^{(1)} \cdots T^{(n-1)}$ (非負行列) とおくと，最終行は $TAx \leq Tb$ と書ける.

  左辺の $TA$ はゼロ行列である.
  - 先の数値例では，$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

- さて，条件 1 の否定「$Ax \leq b$ なる $x$ は存在しない」を仮定すると，

  最終行の $TAx \leq Tb$ は偽の不等式ないといけない.
- 左辺はゼロベクトルなので，右辺のベクトルのうち少なくとも一つの要素が負でないといけない.

  それを第 $i^*$ 要素とする.
- よって，$T$ の第 $i^*$ 行 (の転置) を $y$ とすると，$y \geq 0$, $y'A = 0$, $y'b < 0$ が成り立つことになる.
  - 先の数値例では，$y = (1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})'$
- つまり，条件 2 の否定「$y \geq 0$, $y'A = 0$, $y'b < 0$ なる $y$ が存在する」が導かれた.

# Farkas の補題 (不等式版)

**命題 2.3 (Farkas の補題—不等式版)**

$A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \leq b$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ が成り立つ．

# Gale $\Rightarrow$ Farkas (不等式版) の証明

- Farkas の補題 (不等式版) の条件 1
  「$Ax \leq b$, $x \geq 0$ なる $x$ が存在する」は

  $Ax \leq b$, $-x \leq 0$ なる $x$ が存在する

  と同値.

- 行列で書くと,
  $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ なる $x$ が存在する.

- Gale の定理より，これは

  $$\begin{pmatrix} y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} = 0,\ y' \geq 0,\ z' \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

  と同値.

- これは

  $$y'A \geq 0,\ y' \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$$

  と同値 (Farkas の補題 (不等式版) の条件 2).

# Farkas (不等式版) ⇒ Farkas (等式版) の証明

- Farkas の補題 (等式版) の条件 1
  「$Ax = b$, $x \geq 0$ なる $x$ が存在する」は

  $Ax \leq b$, $-Ax \leq -b$, $x \geq 0$ なる $x$ が存在する

  と同値.

- 行列で書くと,
  $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ なる $x$ が存在する.

- Farkas の補題 (不等式版) より，これは

  $$(y' \quad z') \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \geq 0,\ y' \geq 0,\ z' \geq 0 \Rightarrow (y' \quad z') \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \geq 0$$

  つまり

  $$(y - z)'A \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \Rightarrow (y - z)'b \geq 0$$

  と同値.

- これは $y'A \geq 0 \Rightarrow y'b \geq 0$ と同値 (Farkas の補題 (等式版) の条件 2).

## Farkas の補題の特殊ケース

**命題 2.4 (凸多面体の分離定理)**

$A$ を $m \times n$ 行列，$b \in \mathbb{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax = b$, $\mathbf{1}'x = 1$, $x \geq 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しない．
2. $y'A \gg (y'b)\mathbf{1}'$ なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

# $1 \Rightarrow 2$ の幾何的意味

- 「凸多面体に対する分離定理」と見る.
- $C = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ とおく.
- 条件 1 は「$b \notin C$」と同値.
- $A$ の列ベクトルを $a^1, \ldots, a^n$ とおく ($A = (a^1, \ldots, a^n)$).
- 「$z \in C$」とは

  ある $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$ に対して $z = x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n$ と書ける

  ということ.
- $C$ は「$a^1, \ldots, a^n$ で張られる凸多面体」.

- 条件 2 「$y'a^1 > y'b, \dots, y'a^n > y'b$ なる $y$ が存在する」は

  「ある $y$ ($\neq 0$) が存在して，凸多面体 $C$ と点 $b$ が，$y$ を法線ベクトルとする超平面によって分離される」

  ということ.

  (条件 2 が成り立つならば，「すべての $z \in C$ に対して $y'z > y'b$」が成り立つ．)

# 命題 2.4 の証明

- 条件 1 を行列で書くと,

  $$\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix},\ x \geq 0 \text{ なる } x \in \mathbb{R}^n \text{ が存在しない.}$$

- Farkas の補題より，これは

  $$\begin{pmatrix} y' & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} y' & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} < 0 \text{ なる } y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

  と同値.

- すなわち,

  $-y'A \leq z\mathbf{1}'$, $z < -y'b$ なる $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}$ が存在する

  と同値.

- これは

  $-y'A \ll -(y'b)\mathbf{1}'$ なる $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する

  と同値 (条件 2).

## Gordan の定理

**命題 2.5 (Gordan の定理)**

$A$ を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である.

1. $Ax \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A = 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ.

- 命題 2.4 で $b = 0$ とする.

# Ville の定理

### 命題 2.6 (Ville の定理)

$A$ を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である．

1. $Ax \gg 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する．
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y = 0$ が成り立つ．

# Stiemke の定理

### 命題 2.7 (Stiemke の定理)

$A$ を $m \times n$ 行列とする．次の 2 つの条件は同値である.

1. $Ax = 0$, $x \gg 0$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.
2. すべての $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $y'A \geq 0 \Rightarrow y'A = 0$ が成り立つ.

# 有限 Markov 連鎖の定常分布の存在

- $n \times n$ 正方行列 $A = (a_{ij})$ が
  - すべての $i, j$ に対して $a_{ij} \geq 0$
  - すべての $i$ に対して $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$

  を満たすとき，$A$ を行確率行列 (row stochastic matrix)，あるいは行 Markov 行列 (row Markov matrix) という.
- 確率行列は有限 Markov 連鎖の遷移確率を表す：
  - $a_{ij}$ は状態変数が $i$ から $j$ に移る確率
- $y \in \mathbb{R}^n$ が
  - すべての $i$ に対して $y_i \geq 0$
  - $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

  を満たすとき，$y$ を確率ベクトルという.
- 確率ベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ が $y'A = y'$ を満たすとき，$y$ を $A$ の定常分布という.

命題 2.8

どんな確率行列に対しても定常分布が存在する.

- Farkas の補題 (の一種) を使って証明してみる.
- 他にも, Perron-Frobenius 定理や Brouwer の不動点定理を使った証明もある.

## 証明

- $y'(A-I)=0$, $y'\mathbf{1}=1$, $y \geq 0$ なる $y$ が存在することを示したい.
- そのような $y$ が存在しなければ，Gordan の定理より，
  $(A-I)x \gg 0$ (すなわち $Ax \gg x$) なる $x$ が存在する.
- そのような $x$ に対して，$i^*$ を $x_{i^*} \geq x_j$ (すべての $j$ に対して) となるものとする.
- すると，

$$
\begin{aligned}
(Ax)_{i^*} &= \sum_{j=1}^{n} a_{i^*j} x_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} a_{i^*j} x_{i^*} \quad (\because a_{i^*j} \geq 0 \text{ (すべての } j \text{ に対して)}) \\
&= x_{i^*} \sum_{j=1}^{n} a_{i^*j} = x_{i^*} \quad (\because \sum_{j=1}^{n} a_{i^*j} = 1)
\end{aligned}
$$

となるので，$Ax \gg x$ と矛盾.

# 資産価格付けの理論

- 教科書 6.6 節–6.8 節, 『経出る』6.5.4 節
- 「現在」と「将来」の 2 期のみケースを考える.
- 将来の「状態」: $1, \ldots, S$
- 証券: $j = 1, \ldots, N$
- 各証券 $j$ は収益ベクトル $d_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ \vdots \\ d_{Sj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^S$ で特徴付けられる.
- 収益行列:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{S1} & \cdots & d_{SN} \end{pmatrix}$$

- ポートフォリオ：$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$
  - $z_j > 0$：ロングポジション (買いポジション)
  - $z_j < 0$：ショートポジション (売りポジション)
- 状態 $s$ での収益：$d_{s1}z_1 + \cdots + d_{sN}z_N$

  これを $s = 1, \dots, S$ で並べたもの：$Dz \in \mathbb{R}^S$
- 証券価格ベクトル：$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$
- 支出額：$q'z$
- 初期保有：$0 \in \mathbb{R}^N$
- 予算制約：$q'z \leq 0$

## 無裁定価格

### 定義 2.1

- ポートフォリオ $z$ が価格ベクトル $q$ の下での裁定取引であるとは,

  $$q'z \leq 0, \ Dz \geq 0, \ [q'z \neq 0 \text{ または } Dz \neq 0]$$

  が成り立つことをいう.

- 価格ベクトル $q$ が無裁定価格であるとは, $q$ の下での裁定取引が存在しないことをいう.

- (教科書の定義 6.5 だと, 定理 6.2 は成り立たない. )

### 定義 2.2

- ポートフォリオ $z$ が価格ベクトル $q$ の下での強い意味での裁定取引であるとは,

  $$q'z < 0, \ Dz \geq 0$$

  が成り立つことをいう.

- 価格ベクトル $q$ が弱い意味での無裁定価格であるとは, $q$ の下での強い意味での裁定取引が存在しないことをいう.

# 資産価格付けの基本定理

### 命題 2.9
次の 2 つの条件は同値である.

1. $q$ が無裁定価格である.
2. $\phi' D = q'$, $\phi \gg 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する.

- Stiemke の定理より.

### 命題 2.10
次の 2 つの条件は同値である.

1. $q$ が弱い意味での無裁定価格である.
2. $\phi' D = q'$, $\phi \geq 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する.

- Farkas の補題そのもの.

# 命題 2.9 の証明

- 条件 2 「$\phi' D = q'$, $\phi \gg 0$ なる $\phi \in \mathbb{R}^S$ が存在する」は
  $$\begin{pmatrix} x' & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} = 0,\ x \gg 0,\ w > 0$$ なる $x \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}$ が存在する
  と同値.
- Stiemke の定理より，これは
  $$\begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} z \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} D \\ -q' \end{pmatrix} z = 0$$
  と同値.
- すなわち,
  $$Dz \geq 0,\ q'z \leq 0 \Rightarrow Dz = 0,\ q'z = 0$$
  と同値.
- これは $q$ が無裁定価格であること (条件 1) を意味する.

# 状態価格/リスク中立確率

- $q$ が無裁定価格であるとする.
- $\Rightarrow \phi' D = q'$ なる $\phi \gg 0$ が存在する.
- $\phi$ を状態価格ベクトルという.
  - $q_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s d_{sj}$
  - $\phi_s$ は「状態 $s$ の価値」を表していると見なせる.
- $\phi_0 = \sum_{s=1}^{S} \phi_s$ $(> 0)$ とし，$\pi \in \mathbb{R}^S$ を

$$\pi_s = \frac{\phi_s}{\phi_0}$$

で定義する.

$\pi$ をリスク中立確率測度という.

- (解釈を与えるために) $d_1 = \mathbf{1}$ (無リスク証券) であるケースを考える.
- $q_1 = \sum_{s=1}^{S} \phi_s \times 1 = \phi_0$
- $q_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s d_{sj}$ より

$$\frac{q_j}{q_1} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{d_{sj}}{d_{s1}}$$

  - 将来時点での証券 $j$ の (無リスク証券の収益に対する) 相対収益の $\pi$ による期待値が, 現在時点での証券 $j$ の (無リスク証券の価格に対する) 相対価格に等しい.

# オプションの価格付け

- 状態: $\{1,2\}$
- 証券
  - 株券 (リスク証券): $(uS^0, dS^0)$, $\quad u > 1 > d$
  - 債券 (安全証券): $(rB, rB)$, $\quad r > 1$

    $u > r$ $(> 1 > d)$ とする.
  - コールオプション (派生証券): $(\max\{0, uS^0 - K\}, \max\{0, dS^0 - K\})$

    $K$: 権利行使価格

    「価格 $K$ で株券を買うことができる権利」
- 証券価格ベクトル: $q = (S^0, B, q_3)$

  $q$ が無裁定価格になるような $q_3$ を定めよ.

- 収益行列:

$$D = \begin{pmatrix} uS^0 & rB & \max\{0, uS^0 - K\} \\ dS^0 & rB & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix}$$

- 状態価格ベクトル $\phi$:

$$\phi' D = q'$$

- 証券 $j = 1, 2$ について：

$$uS^0 \phi_1 + dS^0 \phi_2 = S^0$$

$$rB\phi_1 + rB\phi_2 = B$$

- この連立方程式の (一意) 解：

$$\phi_1 = \frac{r - d}{r(u - d)}, \ \phi_2 = \frac{u - r}{r(u - d)} \qquad (u > r > d \text{ より } > 0).$$

- 証券 $j = 3$ について：

$$q_3 = \phi_1 \max\{0, uS^0 - K\} + \phi_2 \max\{0, dS^0 - K\}.$$

# Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件

- $X \subset \mathbb{R}^n$
- $f\colon X \to \mathbb{R}$: 目的関数
- $g_i\colon X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$: 不等式制約
- $h_k\colon X \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, \ell,\ \ell < n)$: 等式制約

## 制約付き最大化問題

$$
\begin{aligned}
(*) \quad & \max_{x} \quad f(x) \\
& \text{s.t.} \quad g_1(x) \geq 0 \\
& \qquad\quad \vdots \\
& \qquad\quad g_m(x) \geq 0 \\
& \qquad\quad h_1(x) = 0 \\
& \qquad\quad \vdots \\
& \qquad\quad h_\ell(x) = 0
\end{aligned}
$$

- $C \subset X$ を制約条件を満たす $x$ の集合とする.
- Lagrange 関数 (不等式の向き・$\lambda_i$ の項の符号に注意)：

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k h_k(x)$$

# Karush-Kuhn-Tucker の定理

- $x \in C$ に対して $I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$ と書く.

### 命題 2.11 (Karush 1939; Kuhn-Tucker 1950)

- $x^* \in C$ が (∗) の最適解である
- $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$, $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_\ell(x^*)$ が線形独立である ("制約想定条件")

ならば，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ が存在して

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \nabla h_k(x^*) = 0$

(ii) $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i g_i(x^*) = 0$ (すべての $i = 1, \ldots, m$ に対して)

が成り立つ.

- (i) を書き下すと：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x^*) = 0$$

(すべての $j = 1, \ldots, n$ に対して)

- (ii) を相補性条件という：

$$g_i(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

# 証明 (不等式制約のみのケース)

- ($h_1(x) = 0, \dots, h_\ell(x) = 0$ がないものとする．)
- $x^* \in C$ が最適解であるとし,
  - $g_{i_1}(x^*) = 0, \dots, g_{i_{m^*}}(x^*) = 0$
    (不等式制約を等式で満たす)
  - $g_{i_{m^*+1}}(x^*) > 0, \dots, g_{i_m}(x^*) > 0$
    (不等式制約を厳密な不等号で満たす)

  とする.
- どんな $z \in \mathbb{R}^n$ に対しても，$t \approx 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
&f(x^* + tz) \approx f(x^*) + (\nabla f(x^*) \cdot z)t \\
&g_i(x^* + tz) \approx (\nabla g_i(x^*) \cdot z)t && (i = i_1, \dots, i_{m^*}) \\
&g_i(x^* + tz) > 0 && (i = i_{m^*+1}, \dots, i_m)
\end{aligned}
$$

- もし，

$$\nabla f(x^*) \cdot z > 0, \nabla g_{i_1}(x^*) \cdot z > 0, \ldots, \nabla g_{i_{m^*}}(x^*) \cdot z > 0$$

なる $z$ が存在すると，十分小さな $t$ に対して

$$f(x^* + tz) > f(x^*), g_1(x^* + tz) > 0, \ldots, g_m(x^* + tz) > 0$$

となり，$x^*$ が最適解であることに反する.

- したがって，そのような $z$ は存在しない.
- この条件を行列で書くと：

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x^*)' \\ \nabla g_{i_1}(x^*)' \\ \vdots \\ \nabla g_{i_{m^*}}(x^*)' \end{pmatrix} z \gg 0$$ なる $z$ が存在しない.

- したがって，Gordan の定理より，
  - $$(\lambda_0, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{m^*}}) \begin{pmatrix} \nabla f(x^*)' \\ \nabla g_{i_1}(x^*)' \\ \vdots \\ \nabla g_{i_{m^*}}(x^*)' \end{pmatrix} = 0$$

    (つまり $\lambda_0 \nabla f(x^*) + \lambda_{i_1} \nabla g_{i_1}(x^*) + \cdots + \lambda_{i_{m^*}} \nabla g_{i_{m^*}}(x^*) = 0$)
  - $\lambda_0, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{m^*}} \geq 0$
  - $(\lambda_0, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{m^*}}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

  なる $\lambda_0, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{m^*}}$ が存在する．
- $\lambda_0 = 0$ とすると，

  $$\lambda_{i_1} \nabla g_{i_1}(x^*) + \cdots + \lambda_{i_{m^*}} \nabla g_{i_{m^*}}(x^*) = 0, \quad (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{m^*}}) \neq (0, \ldots, 0)$$

  となり，線形独立性の仮定に反する．
- したがって，$\lambda_0 > 0$ なので，$\lambda_0 = 1$ と基準化してよい．
- あとは $\lambda_{i_{m^*+1}} = \cdots = \lambda_{i_m} = 0$ と定めればよい．

# 例 1

$$X = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g_1(x) = x \geq 0 \\ & g_2(x) = 1 - x \geq 0 \end{aligned}$$

- $L = f(x) + \lambda_1 x + \lambda_2(1 - x)$
- KKT 条件

$$\begin{aligned} & f'(x) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ & \lambda_1 \geq 0, \ \ \lambda_1 x = 0 \\ & \lambda_2 \geq 0, \ \ \lambda_2(1 - x) = 0 \end{aligned}$$

# 例 2

$$X = \mathbb{R}^2_+,\ p_1, p_2, I > 0$$

$$\begin{aligned} \max_x \quad & u(x) \\ \text{s. t.} \quad & I - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- $L = u(x) + \lambda_0 (I - p_1 x_1 - p_2 x_2) + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$
- KKT 条件

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \lambda_0 p_i + \lambda_i = 0 && (i = 1, 2) \\ & \lambda_0 \geq 0,\ \ \lambda_0 (I - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0 \\ & \lambda_i \geq 0,\ \ \lambda_i x_i = 0 && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

# 線形計画法 (Linear Programming; LP)

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c'x \\
\text{s. t.} \quad & a_1' x \leq b_1 \\
& \quad \vdots \\
& a_m' x \leq b_m \\
& x_1, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$(c, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n)$$

- 行列表記：

  $\max_x c'x \quad \text{s.t. } Ax \leq b,\ x \geq 0$

  - $A = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

- とりあえずラグランジュ関数を書いてみる：

$$L = c'x + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - a_i'x) + \sum_{j=1}^{n} z_j x_j$$

($y_i, z_j$: ラグランジュ乗数)

- 最適解が存在するとして ($x^*$ とする)，KKT 条件を形式的に書いてみると (制約想定が成り立つとは仮定していないので論理的に正しくないが)：

$$c - \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i + z^* = 0 \tag{1}$$

$$y_i^*(b_i - a_i'x^*) = 0 \tag{2}$$

$$z_j^* x_j^* = 0 \tag{3}$$

$$y_i^* \geq 0 \tag{4}$$

$$z_j^* \geq 0 \tag{5}$$

を満たす $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$, $z^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*)$ が存在する.

- (1) と (5) より

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i - c \geq 0$$

(行列表記：$y'A - c' \geq 0$)

- また (1), (2), (3) より

$$c'x^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i' x^* - z^{*\prime} x^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i = y^{*\prime} b$$

- 実は (制約想定を仮定せずとも)，そのような $y^*$ は存在し，

$\min_y y'b$ s.t. $y'A \geq c$, $y \geq 0$

の最適解になっている.

(そして $c'x^* = y^{*\prime}b$ が成り立つ．)

$\rightarrow$ 「双対定理」

# 双対性

- 主問題 (primal problem)

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c'x \\
\text{s. t.} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- 双対問題 (dual problem)

$$
\begin{aligned}
\text{(D)} \quad \min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & y'b \\
\text{s. t.} \quad & y'A \geq c' \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

- $Ax \leq b$, $x \geq 0$ を満たす $x$, $y'A \geq c'$, $y \geq 0$ を満たす $y$ をそれぞれ (P), (D) の許容解 (feasible solution) という.

# 弱双対性 (Weak Duality)

## 命題 2.12

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ がそれぞれ (P), (D) の許容解ならば，$c'x \le y'b$ が成り立つ.

## 証明

- $Ax \le b$, $x \ge 0$, $y'A \ge c'$, $y \ge 0$ ならば

$$c'x \le (y'A)x = y'(Ax) \le y'b$$

- この命題より,

  (P), (D) の許容解 $x$, $y$ が $c'x \ge y'b$ (したがって $c'x = y'b$) を満たせば,
  それらはそれぞれ (P), (D) の最適解である.

# 強双対性 (Strong Duality)

**命題 2.13 (双対定理 1)**

(P), (D) 両方が許容解を持つならば，両方とも最適解を持ち，

$$\max\{c'x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{y'b \mid y'A \geq c,'\ \ y \geq 0\}$$

が成り立つ.

# 証明

- $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ が (P), (D) の最適解であるための必要十分条件は

  $Ax \leq b,\ A'y \geq c,\ c'x \geq b'y,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

  である.

- 行列表示すると：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & -A' \\ -c' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix},\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

- そのような $(x, y)$ が存在しないとする．(そして矛盾が出ることを示す．)

- すると，Farkas の補題 (不等式版) より，

$$(p' \quad q' \quad r) \begin{pmatrix} A & O \\ O & -A' \\ -c' & b' \end{pmatrix} \geq 0,\ (p' \quad q' \quad r) \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} < 0,$$

$$p \geq 0,\ q \geq 0,\ r \geq 0$$

  なる $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ が存在する.

- 書き下すと：

$$p'A \geq rc' \tag{6}$$

$$Aq \leq rb \tag{7}$$

$$p'b < c'q \tag{8}$$

$$p \geq 0,\ q \geq 0,\ r \geq 0 \tag{9}$$

なる $p$, $q$, $r$ が存在する.

- $r > 0$ だとすると，(6), (7), (9) より，$(p/r)'A \geq c'$, $A(q/r) \leq b$, $p/r \geq 0$, $q/r \geq 0$ が成り立つので，$q/r$, $p/r$ は (P), (D) の許容解であるが，(8) より $(p/r)'b < c'(q/r)$ が成り立ち弱双対性と矛盾.

- $r = 0$ とする.

  $x$, $y$ を (P), (D) の許容解とする.

  すると，(6), (7), (9) より，$(y+p)'A \geq c'$, $A(x+q) \leq b$, $y+p \geq 0$, $x+q \geq 0$ が成り立つので，$x+q$, $y+p$ は (P), (D) の許容解であるが，(8) より $(y+p)'b < c'(x+q)$ が成り立ち弱双対性と矛盾.

## 命題 2.14 (双対定理 2)

1. (D) が最適解を持つならば，(P) も最適解を持ち，

$$\max\{c'x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{y'b \mid y'A \geq c,'\ \ y \geq 0\}$$

が成り立つ.

2. (P) が最適解を持つならば，(D) も最適解を持ち，

$$\max\{c'x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{y'b \mid y'A \geq c,'\ \ y \geq 0\}$$

が成り立つ.

## 証明

- 1 のみ示す.
- (D) が最適解 $y^*$ を持つとする.
- 双対定理 1 より，(P) が許容解を持つことを示せば十分である.
- (P) が許容解を持たない，すなわち

  $Ax \leq b, \ x \geq 0$

  を満たす $x$ が存在しないとする.
- すると，Farkas の補題 (不等式版) より，

  $z'A \geq 0, \ z \geq 0, \ z'b < 0$

  を満たす $z$ が存在する.
- すると $(y^* + z)'A \geq c'$, $y^* + z \geq 0$ が成り立つので，$y^* + z$ は (D) の許容解であるが,

  $(y^* + z)'b < y^{*\prime}b$ が成り立つので，$y^*$ の最適性に矛盾する.

# 主問題・双対問題の諸形式

(以下，転置記号省略)

- $\max cx$ s.t. $Ax = b,\ x \geq 0$
  - $\to \max cx$ s.t. $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},\ x \geq 0$
  - 双対問題：

    $$\min \begin{pmatrix} y^+ & y^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \text{ s.t. } \begin{pmatrix} y^+ & y^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \geq c,\ y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0$$
  - $\iff \min(y^+ - y^-)b$ s.t. $(y^+ - y^-)A \geq c,\ y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0$
  - $\iff \min yb$ s.t. $yA \geq c$ ($y$: 符号制約なし)

- $\max cx$ s.t. $Ax \le b$ $\quad$ ($x$: 符号制約なし)
  - $\to \max c(x^+ - x^-)$ s.t. $A(x^+ - x^-) \ge b$, $x^+ \ge 0$, $x^- \ge 0$
  - $\iff \max \begin{pmatrix} c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$ s.t. $\begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \le b$, $\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \ge 0$
  - 双対問題：

    $\min yb$ s.t. $y \begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} c & -c \end{pmatrix}$, $y \ge 0$
  - $\iff \min yb$ s.t. $yA \ge c$, $-yA \ge -c$, $y \ge 0$
  - $\iff \min yb$ s.t. $yA = c$, $y \ge 0$

| 主問題 | 双対問題 |
|---|---|
| $\max cx$ | $\min yb$ |
| $Ax \leq b$ | $y \geq 0$ |
| $Ax = b$ | $y$: 符号制約なし |
| $x \geq 0$ | $yA \geq c$ |
| $x$: 符号制約なし | $yA = c$ |

# ミニマックス定理

2 人零和ゲーム

- プレイヤー 1 の (純粋) 戦略：$1, \ldots, m$
  プレイヤー 2 の (純粋) 戦略：$1, \ldots, n$
- プレイヤー 1 の利得行列：$A$　　($m \times n$ 行列)
  プレイヤー 2 の利得行列：$-A$　　($m \times n$ 行列)
- プレイヤー 1 の混合戦略の集合：
  $\Delta_m = \{p \in \mathbb{R}^m \mid p_1, \ldots, p_m \geq 0,\ \sum_{i=1}^m p_i = 1\}$
  プレイヤー 2 の混合戦略の集合：
  $\Delta_n = \{q \in \mathbb{R}^n \mid q_1, \ldots, q_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^m q_j = 1\}$
- 混合戦略の組 $(p, q)$ に対して：
  - プレイヤー 1 の期待利得：$pAq$
  - プレイヤー 2 の期待利得：$-pAq$

**命題 2.15 (ミニマックス定理 (von Neumann 1928))**
行列 $A$ に対して

$$(*)\quad \max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in\Delta_n} pAq = \min_{q\in\Delta_n}\max_{p\in\Delta_m} pAq$$

が成り立つ.

- この値を「零和ゲーム $(A,-A)$ の値 (value)」という.

- (左辺) $\leq$ (右辺) は当たり前.
  - 任意の $p, q$ に対して $\min_{\tilde{q}} pA\tilde{q} \leq \max_{\tilde{p}} \tilde{p}Aq$ が成り立つ.
  - したがって，任意の $q$ に対して $\max_p \min_{\tilde{q}} pA\tilde{q} \leq \max_{\tilde{p}} \tilde{p}Aq$ が成り立つ.
  - したがって $\max_p \min_{\tilde{q}} pA\tilde{q} \leq \min_q \max_{\tilde{p}} \tilde{p}Aq$ が成り立つ.
- (左辺) $\geq$ (右辺) が定理の実質的な内容.
- $\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} pAq \geq v^*$
  $\iff \exists p \in \Delta_m\colon \min_{q \in \Delta_n} pAq \geq v^*$
  $\iff \exists p \in \Delta_m \, \forall q \in \Delta_n\colon pAq \geq v^*$
- $v^* \geq \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} pAq$
  $\iff \exists q \in \Delta_n\colon v^* \geq \max_{p \in \Delta_m} pAq$
  $\iff \exists q \in \Delta_n \, \forall p \in \Delta_m\colon v^* \geq pAq$
- ミニマックス定理は，Farkas の一種 (Ville の定理) や Nash 均衡の存在定理から証明することができるが，ここでは線形計画法の双対定理から証明してみる.

## 命題 2.15 の証明

- 行列 $A$ のすべての要素に同じ数を足してもゲームの構造は変わらないので，$A$ のすべての要素は正であると仮定して一般性を失わない.
- 次の 2 つの線形計画問題を考える：

$$(\star) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^n} \quad \mathbf{1}y \qquad \text{s. t.} \quad Ay \leq \mathbf{1},\ y \geq 0$$

$$(\star\star) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad x\mathbf{1} \qquad \text{s. t.} \quad xA \geq \mathbf{1},\ x \geq 0$$

- これらは互いに双対問題になっている.
- $(\star)$ は許容解を持つ (たとえば $y = 0$).
- $(\star\star)$ も許容解を持つ
  ($A$ は正行列なので，すべての要素が十分大きい $x$ を考えればよい).

- したがって，双対定理より，($\star$), ($\star\star$) はそれぞれ最適解 $y^*$, $x^*$ を持ち，$\mathbf{1}y^* = x^*\mathbf{1}$ が成り立つ．

  この値を $\alpha^*$ とする．($\alpha^* > 0$ である．)
- $q^* = \frac{1}{\alpha^*}y^*$, $p^* = \frac{1}{\alpha^*}x^*$ とする．($q^* \in \Delta_n$, $p^* \in \Delta_m$ である．)
- $\alpha^* q^*$ は ($\star$) の許容解なので $Aq^* \leq \frac{1}{\alpha^*}\mathbf{1}$ が成り立つ．
- したがって，すべての $p \in \Delta_m$ に対して $pAq^* \leq \frac{1}{\alpha^*}$ が成り立つ．
- つまり，$\min_{q\in\Delta_n} \max_{p\in\Delta_m} pAq \leq \frac{1}{\alpha^*}$ が成り立つ．
- 同様に，$\alpha^* p^*$ は ($\star\star$) の許容解なので $p^*A \geq \frac{1}{\alpha^*}\mathbf{1}$ が成り立つ．
- したがって，すべての $q \in \Delta_n$ に対して $p^*Aq \geq \frac{1}{\alpha^*}$ が成り立つ．
- つまり，$\max_{p\in\Delta_m} \min_{q\in\Delta_n} pAq \geq \frac{1}{\alpha^*}$ が成り立つ．
- 以上より (左辺) $\geq$ (右辺) が示された．