4. 分離定理 II

尾山 大輔

経済学のための数学

2025 年 6 月 19 日

凸多面体に対する分離定理

- $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$ に対して

  $$\mathrm{conv}\{a^1, \dots, a^m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j a^j \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0,\ \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \right\}$$

  と書く． $\cdots$ $\{a^1, \dots, a^m\}$ の凸包 (convex hull)

- Farkas の補題の特殊ケースとして次を示した．

命題 4.1

$a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$ に対して， $b \notin \mathrm{conv}\{a^1, \dots, a^m\}$ とする． このとき， $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot a^j < p \cdot b \quad (\text{すべての } j = 1, \dots, m \text{ に対して})$$

が成り立つ．

- これを使って一般の凸集合に対する分離定理を導出する．

一般の凸集合に対する弱分離定理

命題 4.2

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ を凸集合，また $b \notin C$ とする．このとき，$p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq p \cdot b \quad (\text{すべての } x \in C \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明

- $P^0 = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| = 1\}$ とする.

  これは有界閉集合 (コンパクト集合) である.

- 各 $x \in C$ に対して $P_x = \{p \in P^0 \mid p \cdot x \leq p \cdot b\}$ とする.

  これは閉集合である.

- $\bigcap_{x \in C} P_x \neq \emptyset$ が示したいことである.

  P^0 のコンパクト性より，P^0 の閉部分集合族 $\{P_x\}_{x \in C}$ が有限交差性を満たすことを示せばよい.

- 任意に有限個の点 $x^1, \ldots, x^m \in C$ をとる.
- C は凸集合なので conv$\{x^1, \ldots, x^m\} \subset C$ である.
- よって，$b \notin C$ より $b \notin$ conv$\{x^1, \ldots, x^m\}$ である.
- よって，命題 4.1 より $\bigcap_{j=1}^m P_{x^j} \neq \emptyset$.
- つまり，$\{P_x\}_{x \in C}$ は有限交差性を満たす.
- よって，P^0 のコンパクト性から $\bigcap_{x \in C} P_x \neq \emptyset$ が示された.

2 つの凸集合に対する弱分離定理

命題 4.3
$C, D \subset \mathbb{R}^n$, $C, D \neq \emptyset$ を凸集合，また $C \cap D = \emptyset$ とする．このとき，$p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq p \cdot y \quad (\text{すべての } x \in C,\ y \in D \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明

- $E = C - D = \{x - y \in \mathbb{R}^n \mid x \in C,\ y \in D\}$ とする.
- C, D が凸集合であることより，E は凸集合である.
- また $0 \notin E$ である.
  - もし $0 \in E$ だとすると，$x - y = 0$ なる $x \in C$, $y \in D$ が存在することになり，$C \cap D = \emptyset$ に矛盾.
- よって，弱分離定理 (命題 4.2) より，$p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して,

  $$p \cdot z \leq p \cdot 0 \quad (\text{すべての } z \in E \text{ に対して})$$

  が成り立つ.
- これは

  $$p \cdot x \leq p \cdot y \quad (\text{すべての } x \in C,\, y \in D \text{ に対して})$$

  と同値.

一般の閉凸集合に対する強分離定理

命題 4.4

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ を閉凸集合，また $b \notin C$ とする．このとき，$p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p \cdot x \leq \alpha < p \cdot b \quad (\text{すべての } x \in C \text{ に対して})$$

が成り立つ.

証明

- $b \notin C$ とする.
- C は閉集合なので，ある $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在して $B_{\bar{\varepsilon}}(b) \cap C = \emptyset$ が成り立つ.
- C と $B_{\bar{\varepsilon}}(b)$ は凸集合なので，命題 4.3 より，ある $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して,

  $$p \cdot x \leq p \cdot y \quad (\text{すべての } x \in C,\ y \in B_{\bar{\varepsilon}}(b) \text{ に対して})$$

  が成り立つ.

  $\|p\| = 1$ と基準化してよい.
- とくに $y = b - \bar{\varepsilon} p$ として,

  $$p \cdot x \leq p \cdot (b - \bar{\varepsilon} p) \quad (\text{すべての } x \in C,\ y \in B_{\bar{\varepsilon}}(b) \text{ に対して})$$

  が成り立つが，右辺は $p \cdot b - \bar{\varepsilon}$ ($< p \cdot b$) なので,

  $$\alpha = p \cdot b - \bar{\varepsilon}$$

  とすることで所望の不等式を得る.

非負ベクトルによる分離

補題 4.5

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ が $A - \mathbb{R}^n_{++} \subset A$ を満たすとする．$p \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$p \cdot x \leq \alpha \quad (\text{すべての } x \in A \text{ に対して})$$

が成り立つならば，$p \geq 0$ である．

証明

- $p_i < 0$ だったとする．
- 任意に $x^0 \in A$ をとり，$z \in \mathbb{R}^n_{++}$ を $z = (1, \ldots, 1, \underbrace{t}_{i}, 1, \ldots, 1)$ $(t > 0)$ というベクトルとする．
- すると，どんな $t > 0$ に対しても $x^0 - z \in A - \mathbb{R}^n_{++} \subset A$ であるが，$p \cdot (x^0 - z) = p \cdot x + t(-p_i) + \sum_{j \neq i} p_j$ は t を大きくするといくらでも大きくなるので，すべての $x \in A$ に対して $p \cdot x \leq \alpha$ という条件に矛盾する．

命題 4.6

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ を凸集合とする．このとき，$C \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ ならば，$p \geq 0$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \leq 0 \quad (\text{すべての } x \in C \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明

- $A = C - \mathbb{R}^n_{++}$ とする.
- C と $\mathbb{R}^n_{++}$ は凸集合なので，A は凸集合である.
- $C \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ より $0 \notin A$ である.
- よって，弱分離定理 (命題 4.2) より，ある $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ が存在して

  $$p \cdot z \leq p \cdot 0 \text{ すべての } z \in A \text{ に対して}$$

  が成り立つ.
- $A - \mathbb{R}^n_{++} \subset A$ が成り立つので，補題 4.5 より $p \geq 0$ である.
- すべての $x \in C$ と $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して $p \cdot x \leq p \cdot y$ であるが，

  $y \to 0$ とすることで，すべての $x \in C$ に対して $p \cdot x \leq 0$ を得る.

生産可能性集合

- $Y \subset \mathbb{R}^n$：ある企業の生産可能性集合 ($Y \neq \emptyset$ とする)
- $x \in Y$：技術的に実現可能な生産計画
  - $x_i > 0$：産出
  - $x_j < 0$：投入
- 価格ベクトル p の下での利潤：

$$\underbrace{[\cdots + p_i \times x_i + \cdots]}_{\text{収入}} - \underbrace{[\cdots + p_j \times (-x_j) + \cdots]}_{\text{費用}} = p \cdot x$$

効率的生産と利潤最大化

- 生産可能性集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$x \in Y$ が効率的 (efficient) であるとは,

$$y \geq x,\ y \neq x \implies y \notin Y$$

を満たすことをいう.

- $x \in Y$ が弱い意味で効率的 (weakly efficient) であるとは,

$$y \gg x \implies y \notin Y$$

を満たすことをいう.

- 効率的 $\implies$ 弱い意味で効率的

命題 4.7

$Y \subset \mathbb{R}^n$ は凸集合であるとする．$x \in Y$ が弱い意味で効率的ならば，ある $p \geq 0$, $p \neq 0$ が存在して

$$p \cdot x \geq p \cdot y \quad (\text{すべての } y \in Y \text{ に対して})$$

が成り立つ．

証明

- $x \in Y$ が弱い意味で効率的であるとする．
- すると，$(Y - \{x\}) \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$ である．
- Y が凸集合であることより $Y - \{x\}$ は凸集合なので，命題 4.6 より，ある $p \geq 0$, $p \neq 0$ が存在して，すべての $z \in Y - \{x\}$ に対して $p \cdot z \leq 0$ が成り立つ，すなわち，すべての $y \in Y$ に対して $p \cdot y \leq p \cdot x$ が成り立つ．

閉凸集合と支持関数

- 集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Y \neq \emptyset$ に対して,

  $$\pi_Y(p) = \sup_{x \in Y} p \cdot x$$

  で定義される関数 $\pi_Y : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を Y の支持関数 (support function) という.

  - 「sup」 $\cdots$ 上限 (supremum)
  - すべての $x \in Y$ に対して $p \cdot x \leq \alpha$ となるような α を集合 $\{p \cdot x \mid x \in Y\}$ の上界 (upper bound) という.
  - $\{p \cdot x \mid x \in Y\}$ ($\neq \emptyset$) の上界が存在するとき, 上界たちの集合に最小値が存在する.

    それを $\{p \cdot x \mid x \in Y\}$ の上限といい, $\sup\{p \cdot x \mid x \in Y\}$ とか $\sup_{x \in Y} p \cdot x$ と書く.
  - $\{p \cdot x \mid x \in Y\}$ の上界が存在しないときは, $\sup_{x \in Y} p \cdot x = \infty$ とする.

- Y が閉凸集合ならば, π_Y は Y に関する情報をすべて持つ. $\to$

命題 4.8

$Y \subset \mathbb{R}^n$, $Y \neq \emptyset$ を閉凸集合とする．このとき

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot x \leq \pi_Y(p) \ (\text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ に対して})\}$$

が成り立つ.

証明

- $Y \subset$ (右辺) は π_Y の定義からすぐ.
- $Y \supset$ (右辺) を示すために，$b \notin Y$ とする.
- Y は閉凸集合なので，強分離定理 (命題 4.4) より，ある $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{p} \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

  $$\bar{p} \cdot x \leq \alpha < \bar{p} \cdot b \quad (\text{すべての } x \in Y \text{ に対して})$$

  が成り立つ，つまり

  $$\pi_Y(\bar{p}) = \sup_{x \in Y} \bar{p} \cdot x < \bar{p} \cdot b$$

  が成り立つ.
- これは $b \notin$ (右辺) を意味する.

生産可能性集合と利潤関数

- $Y \subset \mathbb{R}^n$：ある企業の生産可能性集合 ($Y \neq \emptyset$ とする)
- 利潤関数

$$\pi_Y(p) = \sup_{x \in Y} p \cdot x$$

- Y は閉凸集合であるとする.

  もし $\pi_Y(p)$ がすべての $p \in \mathbb{R}^n$ に対して定義されていたら，π_Y から Y を再現できる (命題 4.8).

- ふつうは価格は (少なくとも) 非負.
- $\pi_Y(p)$ が $p \in \mathbb{R}^n_+$ に対してのみ定義されているとき，π_Y から Y が再現できるためには，どんな追加的な仮定が必要か.
- Y が自由処分性 (free diposal) を満たすとは,

  $$Y - \mathbb{R}^n_+ \subset Y$$

  を満たすことをいう.

命題 4.9
$Y \subset \mathbb{R}^n$, $Y \neq \emptyset$ は閉凸集合で自由処分性を満たすとする．このとき

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot x \leq \pi_Y(p) \ (\text{すべての } p \in \mathbb{R}^n_+ \text{ に対して})\}$$

が成り立つ.

証明

- $Y \subset$ (右辺) は π_Y の定義からすぐ.
- $Y \supset$ (右辺) を示すために, $b \notin Y$ とする.
- Y は閉凸集合なので, 強分離定理 (命題 4.4) より, ある $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{p} \neq 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

  $$\bar{p} \cdot x \leq \alpha < \bar{p} \cdot b \quad (\text{すべての } x \in Y \text{ に対して})$$

  が成り立つ, つまり

  $$\pi_Y(\bar{p}) = \sup_{x \in Y} \bar{p} \cdot x < \bar{p} \cdot b$$

  が成り立つ.
- Y は自由処分性 $Y - \mathbb{R}^n_+ \subset Y$ を満たす (よって $Y - \mathbb{R}^n_{++} \subset Y$ を満たす) ので, 補題 4.5 より $\bar{p} \geq 0$ である.
- よって $b \notin$ (右辺) である.

生産関数と利潤関数

- 生産関数：$y = f(z_1, \dots, z_{n-1}) \quad (y \geq 0,\ z_j \geq 0)$
- $\Rightarrow$ 生産可能性集合

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq f(-x_1, \dots, -x_{n-1}),\ x_1, \dots, x_{n-1} \leq 0\}$$

$\cdots$ 自由処分性を満たす.

- 利潤関数 $(p \geq 0)$

$$\begin{aligned}
\pi_Y(p) &= \sup_{x \in Y} p \cdot x \\
&= \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \leq 0} p_n f(-x_1, \dots, -x_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot x_j \\
&= \sup_{z_1, \dots, z_{n-1} \geq 0} p_n f(z_1, \dots, z_{n-1}) - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot z_j
\end{aligned}$$

- $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $p_{-n} = (p_1, \dots, p_{n-1})$ と書くことにする.
- 生産関数 f は凹関数かつ連続であるとする. $\Longrightarrow$ Y は閉凸集合.
- 命題 4.9 より,

$$
\begin{aligned}
&(-z, x_n) \in Y \\
&\iff -p_{n-1} \cdot z + p_n x_n \leq \pi_Y(p) \quad (\text{すべての } p \geq 0 \text{ に対して}) \\
&\iff -p_{n-1} \cdot z + x_n \leq \pi_Y(p_{n-1}, 1) \quad (\text{すべての } p_{n-1} \geq 0 \text{ に対して})
\end{aligned}
$$

- 与えられた $z \in \mathbb{R}^{n-1}_{+}$ に対して生産関数の値 $f(z)$

  $= (-z, x_n) \in Y$ となる x_n の最大値
- よって,

$$
f(z) = \min_{p_{n-1} \geq 0} \pi_Y(p_{n-1}, 1) + p_{n-1} \cdot z
$$

- これは以前 f の微分可能性の仮定の下で (分離定理を使わず) 導いたが, この仮定は実は不要