

3. 位相速習

尾山 大輔

経済学のための数学

2025 年 6 月 12 日

分離定理の導出方針

有限錐に対する分離定理 (Farkas の補題)



凸多面体に対する分離定理



一般の凸集合に対する弱分離定理



一般の閉凸集合に対する強分離定理

- ▶ 「凸多面体」から「一般の凸集合」を導くところで位相的な議論が必要になる.
- ▶ その他, 超重要定理を含めて, $\mathbb{R}^n$ の位相について一気に学ぶ.
(教科書 2.1 節 + α)

実数列の収束

- ▶ 実数列とは $\mathbb{N}$ (自然数の集合) から $\mathbb{R}$ (実数の集合) への関数のことである.

$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ とか $\{x^m\}$ とか, と書くことにする.

(下付添え字はベクトルの要素を表すためにとっておくことにする.)

- ▶ 実数列 $\{x^m\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは次が成り立つことをいう:

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, ある自然数 M が存在して

$$|x^m - \alpha| < \varepsilon \quad (\text{すべての } m \geq M \text{ に対して})$$

が成り立つ.

- ▶ このとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \alpha \quad \text{とか} \quad x^m \rightarrow \alpha \ (m \rightarrow \infty) \quad \text{とか}$$

と書く.

- ▶ また, α を $\{x^m\}$ の極限という.
- ▶ 何らかの極限に収束する実数列を収束列という.

アルキメデスの原理

- ▶ アルキメデスの原理：

どんな実数に対しても，それより大きい自然数が存在する.

- ▶ 同値な言い換え：

どんな正の実数 a, b に対しても，ある自然数 N が存在して $a < Nb$ が成り立つ.

- ▶ 「公理」として前提とする.

収束の例

▶ 例： $x^m = \frac{1}{m}$ とすると $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = 0$

▶ 証明：

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

▶ 自然数 M を $M > \frac{1}{\varepsilon}$ なるものとする.

▶ (ここでアルキメデスの原理を使った.)

▶ すると, $m \geq M$ ならば

$$\left| \frac{1}{m} - 0 \right| = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{M} < \varepsilon$$

が成り立つ.

▶ したがって $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$ が示された.

収束に関するいくつかの性質

1. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \alpha$, $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = \beta$ ならば $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m + y^m = \alpha + \beta$.
2. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \alpha$ ならば $\lim_{m \rightarrow \infty} cx^m = c\alpha$.
3. $x^m \leq y^m$ (すべての m に対して) かつ $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \alpha$,
 $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = \beta$ ならば $\alpha \leq \beta$.
4. $x^m \leq y^m \leq z^m$ (すべての m に対して) かつ
 $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \lim_{m \rightarrow \infty} z^m = \alpha$ ならば $\{y^m\}$ も収束して
 $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = \alpha$.

実数の完備性

- ▶ 実数列 $\{x^m\}$ が **Cauchy 列** であるとは次が成り立つことをいう：

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、ある自然数 M が存在して

$$|x^m - x^n| < \varepsilon \quad (\text{すべての } m, n \geq M \text{ に対して})$$

が成り立つ.

- ▶ 例：1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...

- ▶ 収束する実数列は Cauchy 列である.

- ▶ 実数の完備性：

Cauchy 実数列は必ず収束する.

- ▶ これも「公理」とする.

有界列, 部分列

- ▶ 実数列 $\{x^m\}$ が有界であるとは, ある r が存在して

$$|x^m| \leq r \quad (\text{すべての } m \text{ に対して})$$

が成り立つことをいう.

- ▶ 収束列は有界である.
- ▶ 有界列は収束するとは限らない.

例: $1, -1, 1, -1, \dots$

- ▶ が, 有界列は必ず収束する「部分列」を持つ.
- ▶ 実数列 $\{x^m\}$ の**部分列**とは, $1 \leq m(1) < m(2) < \dots$ という番号の無限列を用いて, $\{x^m\}$ から $x^{m(1)}, x^{m(2)}, \dots$ を取り出して作られる実数列のこと.

$\{x^{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ とか $\{x^{m(k)}\}$ とか, と書く.

有界列の収束部分列

定理 3.1

有界実数列は収束部分列を持つ.

証明

- ▶ $\{x^m\}$ を有界列とする.

これが同一の実数を無限個含むと、収束部分列は明らかに存在するので、そうでないとする.

- ▶ 大きな区間 I_1 を $\{x^m\} \subset I_1$ となるようにとる.

- ▶ I_1 を中点で2つの区間に分ける.

少なくともどちらか一方の区間は無限個の x^m を含む. それを I_2 とする.
(両方ともこの性質を持つときは, 左側を I_2 とする.)

- ▶ I_2 を中点で2つの区間に分け, 同じ作業を行う.

- ▶ これを繰り返す.

- ▶ $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ であり, $k \rightarrow \infty$ で

$$(I_k \text{ の長さ}) = \frac{1}{2^{k-1}} (I_1 \text{ の長さ}) \rightarrow 0$$

である (アルキメデスの原理を用いた).

- ▶ $\{x^m\}$ の部分列 $\{x^{m(k)}\}$ を次のようにとる:
 - ▶ $x^{m(1)} = x^1$ ($\in I_1$) とする.
 - ▶ $m(2)$ を $m(2) > m(1)$ かつ $x^{m(2)} \in I_2$ となるものとする.
 - ▶ $m(3)$ を $m(3) > m(2)$ かつ $x^{m(3)} \in I_3$ となるものとする.
 - ▶ $\dots$
- ▶ このようにできた $\{x^{m(k)}\}$ は Cauchy 列である.
- ▶ 実数の完備性の公理より, これは収束する.

$\mathbb{R}^n$ の点列の収束

- ▶ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$$

- ▶ 次が成り立つことに注意：

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (1)$$

- ▶ $\mathbb{R}^n$ の点列とは $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}^n$ への関数のことである.
- ▶ $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^m\}$ が $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ に**収束する**とは次が成り立つことをいう：

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、ある自然数 M が存在して

$$\|x^m - \bar{x}\| < \varepsilon \quad (\text{すべての } m \geq M \text{ に対して})$$

が成り立つ.

- ▶ $\lim$ の記号とか、 $\mathbb{R}$ のときと同じ.

► 不等式 (1) より, 次の 2 つは同値 :

1. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^m\}$ が $\bar{x}$ に収束する.
2. すべての $i = 1, \dots, n$ に対して, 実数列 $\{x_i^m\}$ が $\bar{x}_i$ に収束する.

$\mathbb{R}^n$ の有界列の収束部分列

定理 3.2

$\mathbb{R}^n$ の有界列は収束部分列を持つ.

証明

- ▶ $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^m\}$ を有界列とする.
- ▶ $\{x^m\}$ の第 1 要素からなる実数列 $\{x_1^m\}$ は有界なので, 定理 3.1 より収束部分列 $\{x_1^{m_1(k)}\}$ を持つ.
- ▶ $\{x^{m_1(k)}\}$ の第 2 要素からなる実数列 $\{x_2^{m_1(k)}\}$ は有界なので, 定理 3.1 より収束部分列 $\{x_2^{m_2(k)}\}$ を持つ.
- ▶ ...
- ▶ $\{x^{m_{n-1}(k)}\}$ の第 n 要素からなる実数列 $\{x_n^{m_{n-1}(k)}\}$ は有界なので, 定理 3.1 より収束部分列 $\{x_n^{m_n(k)}\}$ を持つ.
- ▶ このように構成された $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{m_n(k)}\}$ は元の $\{x^m\}$ の部分列であり, 各要素からなる実数列が収束するので, $\mathbb{R}^n$ の点列としても収束する.

開集合・閉集合

- ▶ $x \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$ と書く.
 x を中心とする ε -開球 (ε -open ball) という.
- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合 (open set) であるとは, すべての $x \in A$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A$ が成り立つことをいう.
- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合 (closed set) であるとは, $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合であることをいう.
- ▶ $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は自明に開集合.
- ▶ $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は自明に閉集合.

例

▶ $\mathbb{R}$ で :

- ▶ $(a, b) (= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\})$: 開集合
- ▶ $[a, b] (= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\})$: 閉集合
- ▶ $(a, b]$: 開集合でも閉集合でもない

▶ $B_\varepsilon(x)$: 開集合

▶ $\mathbb{R}_+^n$: 閉集合

▶ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot x \leq I\}$: 閉集合

▶ $\|p\| \neq 0$ とする.

$p \cdot x > I$ ならば, $\varepsilon = \frac{p \cdot x - I}{\|p\|}$ として, $\|y - x\| < \frac{p \cdot x - I}{\|p\|}$ ならば,

$$p \cdot y = p \cdot (y - x) + p \cdot x \geq -\|p\| \|y - x\| + p \cdot x > I$$

▶ $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid p \cdot x \leq I\}$: 閉集合

閉集合と点列の収束

定理 3.3

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の条件は同値である：

1. A は閉集合である.
2. A 内の任意の点列 $\{x^m\}$ に対して、 $\{x^m\}$ が $\bar{x}$ に収束するならば $\bar{x} \in A$ である.

証明

▶ $1 \Rightarrow 2$:

A が閉集合であるとする.

$\{x^m\}$ が A 内の点列であるとして, $x^m \rightarrow \bar{x}$ とする.

- ▶ $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合であることより, 任意の $x \notin A$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ なので, A 内の点列 $\{x^m\}$ は x に収束しえない.
- ▶ したがって, $\bar{x} \in A$ でないといけない.

- ▶ $2 \Rightarrow 1$ (not $1 \Rightarrow$ not 2) :

A が閉集合でない, すなわち $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合でないとする.

- ▶ すると, ある $\bar{x} \notin A$ が存在して, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $B_\varepsilon(\bar{x}) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus A$ が成り立つ.
- ▶ 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して, $B_{\frac{1}{m}}(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ ということなので, そこから 1 点とって x^m とする.
- ▶ 構成より, A 内の点列 $\{x^m\}$ は A に含まれない点 $\bar{x}$ に収束する.

点列コンパクト集合

- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ が点列コンパクト (sequentially compact) であるとは次が成り立つことをいう：

A 内の任意の点列は A 内の点に収束する部分列を持つ.

- ▶ 定理 3.2 と定理 3.3 より, $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は点列コンパクトである.
 - ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ が有界であるとは, ある r が存在して $A \subset B_r(0)$ が成り立つことをいう.

コンパクト集合

- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{R}^n$ の部分集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の被覆 (cover) であるとは, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つことをいう.
- ▶ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の各要素が開集合であるとき, A の開被覆 (open cover) という.
- ▶ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限個の要素からなるとき, A の有限被覆 (finite cover) という.
- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクト (compact) であるとは, A の任意の開被覆が A の有限被覆を含むことをいう.

コンパクト性条件の言い換え

- ▶ $\mathbb{R}^n$ の部分集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交差性を満たすとは次が成り立つことをいう：

$\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の任意の有限部分族 $\{F_{\lambda_i}\}_{i=1, \dots, k}$ に対して $\bigcap_{i=1}^k F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ が成り立つ.

命題 3.4

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

1. A はコンパクト集合

ならば

2. A の閉部分集合からなる任意の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交差性を満たすならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

が成り立つ.

- ▶ 「 A の閉部分集合」を「相対位相」の基づいて適切に読みかえれば逆も成り立つ.

証明

- ▶ 1 を仮定する.
 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を 2 の仮定を満たすものとする.
- ▶ 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda = \mathbb{R}^n \setminus F_\lambda$ とすると, これは開集合である.
- ▶ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の任意の有限部分族 $\{U_{\lambda_i}\}_{i=1, \dots, k}$ に対して,
 $\bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{R}^n \setminus F_{\lambda_i}) = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^k F_{\lambda_i} \right)$ であるが,
有限交差性より $\bigcap_{i=1}^k F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ なので $\bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i} \not\supset A$ である.
- ▶ よって, A がコンパクトであることより, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \not\supset A$ でないといけない.
- ▶ これは, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right)$ なる $\bar{x} \in A$ が存在することを意味する.
- ▶ したがって, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R}^n \setminus U_\lambda) = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \ni \bar{x}$ より
 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

$(\mathbb{R}^n$ における) コンパクト性条件の同値性

定理 3.5

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 次の条件は同値である:

1. A は有界閉集合である.
2. A は点列コンパクト集合である.
3. A はコンパクト集合である.

▶ この定理より, $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合のことをコンパクト集合と呼んでよい.

証明

- ▶ $1 \Rightarrow 2$: A が有界閉集合であるとする.
- ▶ $\{x^m\}$ を A 内の任意の点列とする.
- ▶ A が有界集合であることから $\{x^m\}$ は有界点列.
定理 3.2 より, 収束部分列を持つ.
- ▶ A が閉集合であることから, 定理 3.3 より, その収束先は A に含まれる.
- ▶ よって, A は点列コンパクトである.

- ▶ $2 \Rightarrow 3$: A が点列コンパクトであるとする.
- ▶ Step 1 : 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 有限個の点 $x^1, \dots, x^k \in A$ が存在して $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x^i)$ が成り立つ.
(この性質が成り立つとき, A は全有界 (totally bounded) であるという.)
- ▶ A が全有界でないとする.
すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, どんな有限個の点 $x^1, \dots, x^k \in A$ に対しても $A \not\subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x^i)$ であるとする.
- ▶ A 内の点列 $\{x^m\}$ を次のように構成する :
 - ▶ $x^1 \in A$ を任意にとる.
 - ▶ $A \setminus B_\varepsilon(x^1) \neq \emptyset$ なので, ここから x^2 をとる.
 - ▶ $A \setminus (B_\varepsilon(x^1) \cup B_\varepsilon(x^2)) \neq \emptyset$ なので, ここから x^3 をとる.
 - ▶ ...
- ▶ 構成より, $m \neq k$ ならば $\|x^m - x^k\| \geq \varepsilon$ なので, この点列は収束部分列を持ちえない.
- ▶ これは A が点列コンパクトであることに矛盾. (Step 1 の証明終)

- ▶ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆とする.

これが有限集合ならばそもそも有限開被覆なので, 無限集合であるとする.

- ▶ Step 2: ある $\varepsilon > 0$ が存在して, すべての $x \in A$ に対してある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset U_\lambda$ が成り立つ.

- ▶ これが成り立たないとする.

すると, すべての $m \in \mathbb{N}$ に対してある $x^m \in A$ が存在して, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $B_{\frac{1}{m}}(x^m) \not\subset U_\lambda$ が成り立つ.

- ▶ A が点列コンパクトであることから, $\{x^m\}$ のある部分列 $\{x^{m(k)}\}$ がある点 $\bar{x} \in A$ に収束する.

- ▶ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は A の被覆なので, ある $\bar{\lambda} \in \Lambda$ が存在して $\bar{x} \in U_{\bar{\lambda}}$.

- ▶ $U_{\bar{\lambda}}$ は開集合なので, ある $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在して $B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x}) \subset U_{\bar{\lambda}}$.

▶ $x^{m(k)} \rightarrow \bar{x}$ より, ある $K \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $k \geq K$ に対して $x^{m(k)} \in B_{\frac{\bar{\varepsilon}}{2}}(\bar{x})$.

▶ ここで, k を $k \geq K$ かつ $\frac{1}{m(k)} < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ なるものとする.

▶ すると, $x \in B_{\frac{1}{m(k)}}(x^{m(k)})$ ならば,

$$\begin{aligned}\|x - \bar{x}\| &\leq \|x - x^{m(k)}\| + \|x^{m(k)} - \bar{x}\| \\ &< \frac{1}{m(k)} + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} = \bar{\varepsilon}\end{aligned}$$

なので, $x \in B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x}) \subset U_{\bar{\lambda}}$ が成り立つ.

▶ つまり, $B_{\frac{1}{m(k)}}(x^{m(k)}) \subset U_{\bar{\lambda}}$.

▶ これは背理法の仮定に矛盾. (Step 2 の証明終)

- ▶ Step 2 の $\varepsilon > 0$ に対して, Step 1 より, 有限個の点 $x^1, \dots, x^k \in A$ が存在して $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x^i)$ が成り立つ.
- ▶ Step 2 より, 各 $i = 1, \dots, k$ に対して, ある $\lambda_i \in \Lambda$ が存在して $B_\varepsilon(x^i) \subset U_{\lambda_i}$ が成り立つ.
- ▶ $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i}$ なので, すなわち $\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^k$ は A の有限開被覆である.
- ▶ よって, A がコンパクト集合であることが示された.

▶ $3 \Rightarrow 1$: A がコンパクト集合であるとする.

▶ A が有界集合であること:

各 $x \in A$ に対して $U_x = B_{\|x\|+1}(0)$ ($= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < \|x\| + 1\}$) とする.

▶ $\{U_x\}_{x \in A}$ は A の開被覆:

▶ U_x は開集合.

▶ $x \in U_x$ なので, $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$.

▶ A がコンパクトであることから, $\{U_x\}_{x \in A}$ は有限被覆 $\{U_{x^i}\}_{i=1, \dots, k}$ を含む.

▶ $x^{i*} = \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^k\|\}$ とすると,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x^i} = U_{x^{i*}} = B_{\|x^{i*}\|+1}(0)$$

が成り立つ.

つまり, A は有界集合.

- ▶ A が閉集合であること :
- ▶ 任意に $y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ をとる.
- ▶ 各 $x \in A$ に対して $\varepsilon(x) = \frac{\|y-x\|}{3}$ (> 0) とする.
- ▶ $\{B_{\varepsilon(x)}(x)\}_{x \in A}$ は A の開被覆である.
- ▶ A がコンパクトであることから, $\{B_{\varepsilon(x)}(x)\}_{x \in A}$ は有限被覆 $\{B_{\varepsilon(x^i)}(x^i)\}_{i=1, \dots, k}$ を含む.
- ▶ $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x^1), \dots, \varepsilon(x^k)\} > 0$ とすると, すべての $i = 1, \dots, k$ に対して $B_{\varepsilon}(y) \cap B_{\varepsilon(x^i)}(x^i) = \emptyset$ なので, $B_{\varepsilon}(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ である.
- ▶ よって, $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合であること, すなわち A が閉集合であることが示された.

$\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合

定理 3.6

$A \subset \mathbb{R}$ が非空コンパクト集合ならば, A は最大値と最小値を持つ.

証明

- ▶ 各 $x \in A$ に対して $F_x = \{y \in A \mid y \geq x\}$ ($\neq \emptyset$) とする.
- ▶ A は閉集合なので, F_x は閉集合である.
- ▶ $\{F_x\}_{x \in A}$ は有限交差性を満たす:
 - ▶ $\{F_{x^i}\}_{i=1, \dots, k}$ を $\{F_x\}_{x \in A}$ の有限部分族とする.
 - ▶ $x^{i*} = \max\{x^1, \dots, x^k\}$ とすると, $\bigcap_{i=1}^k F_{x^i} = F_{x^{i*}} \neq \emptyset$.
- ▶ A がコンパクトであることから $\bigcap_{x \in A} F_x \neq \emptyset$.
- ▶ $x^* \in \bigcap_{x \in A} F_x$ は A の最大値である:
 - ▶ $x^* \in A$, かつ
 - ▶ すべての $x \in A$ に対して, $x^* \in F_x$ すなわち $x^* \geq x$.
- ▶ 最小値についても同様.

連続関数

- ▶ $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^k$ とする.
- ▶ 関数 $f: X \rightarrow Y$ が $\bar{x} \in X$ において連続 (continuous) であるとは次が成り立つことをいう：

X 内の任意の点列 $\{x^m\}$ に対して, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = \bar{x}$ ならば $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x^m) = f(\bar{x})$ が成り立つ.

- ▶ 関数 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは, f がすべての $\bar{x} \in X$ で連続であることをいう.

連続関数によるコンパクト集合の像

- ▶ $A \subset X$ に対して $f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ (ある } x \in A \text{ に対して)}\}$ と書く.

... f による A の像 (image)

定理 3.7

$f: X \rightarrow Y$ が連続関数であるとする. $A \subset X$ がコンパクト集合ならば, $f(A)$ はコンパクト集合である.

証明

- ▶ $A \subset X$ がコンパクト集合であるとする.
 $f(A)$ が点列コンパクト集合であることを示す.
- ▶ $f(A)$ 内の任意の点列 $\{y^m\}$ をとる.
- ▶ $f(A)$ の定義より, 各 m に対して $y^m = f(x^m)$ なる $x^m \in A$ が存在する.
- ▶ A が点列コンパクト集合であることから, $\{x^m\}$ のある部分列 $\{x^{m(k)}\}$ が
ある点 $\bar{x} \in A$ に収束する.
- ▶ f が連続関数であることから,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{m(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{m(k)}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{m(k)}\right) = f(\bar{x})$$

が成り立つ.

- ▶ すなわち, $\{y^m\}$ の部分列 $\{y^{m(k)}\}$ は $f(A)$ 内の点 $f(\bar{x})$ に収束する.
- ▶ したがって, $f(A)$ は点列コンパクト集合である.

Weierstrass の極値定理

- ▶ $X \subset \mathbb{R}^n$ とする.
- ▶ 定理 3.7 と定理 3.6 から直ちに次が従う.

定理 3.8

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数であるとする. $A \subset X$ が非空コンパクト集合ならば f は A で最大値と最小値をとる.

例

- ▶ $p \gg 0, I \geq 0$ とする.
- ▶ $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid p \cdot x \leq I\}$ ($\neq \emptyset$) は有界閉集合, したがってコンパクト集合.
- ▶ $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数ならば, 定理 3.8 より, 最適化問題

$$\begin{array}{ll} \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} & u(x) \\ \text{s. t.} & p \cdot x \leq I \end{array}$$

は最適解を持つ.