ミクロ経済学で出る数学

『経出る』第 5 章–第 7 章のまとめ

尾山 大輔

ミクロ経済学

2019 年 10 月 3 日

復習：予算制約下の効用最大化 (2 財モデル)

$$\max_{x,y} \quad u(x,y)$$
$$\text{s. t.} \quad px + qy = I$$

x, y: 財 1, 2 の消費量

p, q: 財 1, 2 の価格 (所与)

I: 所得 (所与)

(s. t. $\cdots$ “subject to” の略)

$\Rightarrow$ 最大化問題の解 (x^*, y^*): 最適消費計画

(p, q, I の関数と見て：$x^*(p,q,I), y^*(p,q,I)$: 需要関数)

$z = u(x, y)$ のグラフ

予算制約

<u>無差別曲線</u>

効用関数のなす曲面 $z = u(x, y)$ を平面 $z = \bar{u}$ で切った切り口を xy 平面に射影して得られる曲線.

接線条件

最適解 (x^*, y^*) のみたす条件 (1 階条件) の図形的意味を考えたい.

微分とは

微分とは線形近似のこと

一般に複雑な関数を「最も簡単な関数」,

すなわち $\boxed{}$ で局所的に近似する.

1 変数のケース

$y = f(x)$ 上の任意の点 $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ のまわりでグラフをうーんと拡大する.

$y = f(x)$ のグラフは「∞ 倍の世界」では直線に見える.

$(\bar{x}, f(\bar{x}))$ を原点として新たに XY 座標系を設定すると，この直線の式は

$$Y = aX \tag{$*$}$$

の形に書ける (X, Y の 1 次式！).

傾き a を「f の $x = \bar{x}$ における $\boxed{\qquad\qquad}$」といい，$f'(\bar{x})$ と書く.

$\dfrac{df}{dx}(\bar{x})$ とか $\dfrac{dy}{dx}(\bar{x})$ とか，とも書く.

また,「∞ 倍の世界での座標系」であることを示すために,
X, Y のかわりに dx, dy を使う.

すると,(∗) は

(∗∗)

と書ける.

これを「f の $x = \bar{x}$ における微分」という.

もとの世界では,ε が十分小さいとき,

$$f(\bar{x} + \varepsilon) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\varepsilon$$

と近似できる.右辺は ε の 1 次式!

(これを「$f(\bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\varepsilon + o(\varepsilon)$」と書く.)

同じことをもとの座標 x を使って書くと：

x が $\bar{x}$ に十分近いとき,

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

と近似できる．右辺は x の 1 次式！

(これを「1 次のテイラー展開」などと呼ばないこと！

「微分の思想」そのものを表している！)

微分係数の定義

$$f'(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon}.$$

各 x に対して，x における微分係数を対応させる関数を
「f の $\boxed{}$」といい，f' で表す.

$\dfrac{df}{dx}$ とも書く.

f' を求めることを「微分する」という.

微分の意味をもう一度確認！

微分 $=$ 1 次式で近似 $=$ 2 次以降の項は無視

例：$f(x) = x^2$ の $\bar{x}$ における微分

- $\varepsilon \approx 0$ のとき

$$(\bar{x} + \varepsilon)^2 = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$\approx \qquad\qquad \cdots \varepsilon^2 \text{ は小さいから無視！}$$

- 同じことを $\bar{x} + \varepsilon = x$ として書くと：
  $x \approx \bar{x}$ のとき

$$x^2 = \left\{\bar{x} + (x - \bar{x})\right\}^2$$
$$= \bar{x}^2 + 2\bar{x}(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^2$$
$$\approx \qquad\qquad \cdots (x - \bar{x})^2 \text{ は小さいから無視！}$$

微分公式

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
2. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\log x)' = \dfrac{1}{x}.$

『経出る』第 5.3 節参照.

線形近似の例—『経出る』p.126

(1) 指数関数の微分公式

x が 0 に十分近いとき,

$$e^x \approx$$

一般に, x が $\bar{x}$ に十分近いとき,

$$e^x \approx$$

(2) 対数関数の微分公式

x が 1 に十分近いとき,

$$\log x \approx$$

一般に, x が $\bar{x}$ に十分近いとき,

$$\log x \approx$$

弾力性—『経出る』第 5.7.2 項

「f の $\bar{x}$ のおける弾力性」を $e_f(\bar{x})$ と書くとすると，$x \approx \bar{x}$ のとき

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(\bar{x})}{f(\bar{x})}}_{f\text{ の変化率}} \approx e_f(\bar{x}) \times \underbrace{\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}}_{x\text{ の変化率}} . \tag{$*$}$$

つまり，

$$e_f(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \Bigg/ \frac{x-\bar{x}}{\bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} \frac{\bar{x}}{f(\bar{x})} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{f(\bar{x})}.$$

ここで先の $\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}} \approx \log x - \log \bar{x}$，$\frac{f(x)-f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \approx \log f(x) - \log f(\bar{x})$ を思い出すと，
($*$) は

$$\log f(x) - \log f(\bar{x}) \approx e_f(\bar{x})(\log x - \log \bar{x})$$

と書ける．
これを「f の $\bar{x}$ における対数線形近似」と呼ぶことがある．

- ちなみに，f の方はそのままにして書いた近似式
$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \bar{x}f'(\bar{x})(\log x - \log \bar{x})$$
を対数線形近似と呼ぶこともある．
- これは，微分係数の定義式を
$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \bar{x}f'(\bar{x})\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}$$
と書きかえて，さらに $\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}$ の部分を
$$\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}} \approx \log x - \log \bar{x}$$
と近似することにより得られる．
- $\rightarrow$ 『経出る』p.149 脚注 4

関数の増減

関数 $y = f(x)$ を $x = \bar{x}$ のまわりで ∞ 倍に拡大すると直線に見えてきて,
その直線は

$$dy = f'(\bar{x})\, dx$$

という式で表される.

この直線の傾き $f'(\bar{x})$ の符号に注目することで以下がわかる.

<u>関数の増減</u>

- $f'(\bar{x}) > 0$ ならば，関数 f は $x = \bar{x}$ の付近で増加
- $f'(\bar{x}) < 0$ ならば，関数 f は $x = \bar{x}$ の付近で減少

関数の最大・最小

最大化問題：$\max_x f(x)$

最小化問題：$\min_x f(x)$

(合わせて「最適化問題」という．)

<u>最適化の 1 階条件 (必要条件)</u>

最大化 or 最小化問題の解 x^* においては f は山の頂上 or 谷の底になっている.

いずれにおいても ∞ 倍に拡大すると平らに見える.
$\Rightarrow$ 微分係数 $f'(x^*)$ がゼロ！

(ただし，これは x^* が端点でないとき，すなわち x^* が内点のとき．)

最適化の 1 階条件 (First Order Condition)

関数 f が $x = x^*$ で最大または最小となり，$x = x^*$ が内点ならば

$$f'(x^*) = 0.$$

(つまり「微分してイコールゼロとおく」．)

- ただし，これはあくまでも必要条件.
- 原理的には，関数の大域的な性質である最大・最小は，局所的な情報しか与えない微分だけを使って調べられるわけがない.
- 「よい性質」をもった関数の場合，1 階条件だけで答えが出てくる.
  たとえば,
  f が「凹関数」ならば 1 階条件だけで最大化問題の答えが出る,
  f が「凸関数」ならば 1 階条件だけで最小化問題の答えが出る.

凹関数・凸関数

凹関数：上に凸である関数
凸関数：下に凸である関数

(正確には定義 5.2 を参照のこと．)

- 凹関数
  傾きが小さくなっていく $\Leftrightarrow f'$ が減少 $\Leftrightarrow f'' \leq 0$
- 凸関数
  傾きが大きくなっていく $\Leftrightarrow f'$ が増加 $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

<u>命題</u>
(1) f が凹関数のとき，$f'(x^*) = 0$ ならば $x = x^*$ で最大
(2) f が凸関数のとき，$f'(x^*) = 0$ ならば $x = x^*$ で最小

法線ベクトル

$\boldsymbol{x}$ についての 1 次式 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = I$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合の図形的意味は？

$=$ ベクトル $\boldsymbol{p}$ への正射影が一定になるような点 $\boldsymbol{x}$ たち.

<u>法線ベクトル</u>

$\boldsymbol{x}$ についての 1 次式

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = I$$

を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合は $\boxed{}$.

(『経出る』第 6 章 (とくに第 6.3–6.4 節))

多変数のケース

$z = f(x, y)$ 上の任意の点 $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ のまわりでグラフをうーんと拡大
$\Rightarrow$ $z = f(x, y)$ のグラフは「∞ 倍の世界」では平面に見える.

$(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ を原点として新たに XYZ 座標系を設定すると，この平面の式は

$$Z = aX + bY \tag{$*$}$$

の形に書ける (X, Y, Z の 1 次式！).

a を「f の $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ における x による $\boxed{}$」,
b を「f の $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ における y による $\boxed{}$」といい,
それぞれ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$$

と書く.

$f_x(\bar{x}, \bar{y})$ とか $f_1(\bar{x}, \bar{y})$ とか，とも書く.

また,「∞ 倍の世界での座標系」であることを示すために,
X, Y, Z のかわりに dx, dy, dz を使う.

すると,$(*)$ は

$$\tag{$**$}$$

と書ける.

これを「f の $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ における$\boxed{\qquad\qquad}$」という.

この平面の法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

偏微分係数は

$$a = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{dy=0}, \quad b = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{dx=0}$$

を満たす．(平面 $dy = 0$，平面 $dx = 0$ との交わり．)

<u>偏微分係数の定義</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x} + \varepsilon, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{\varepsilon},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon) - f(\bar{x}, \bar{y})}{\varepsilon}.$$

「ある変数で偏微分する」とは「その変数以外を定数とみなして微分する」ということ．

各 (x, y) に対して，(x, y) における x による偏微分係数を対応させる関数を「f の $\boxed{}$」といい，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ で表す.

(f_x とか f_1 とか，とも書く.)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めることを「x で偏微分する」という.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ についても同様.

<u>練習</u> $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ を x, y でそれぞれ偏微分せよ.（『経出る』例題 7.3)

上の練習の結果から，とくに $r \approx 0$, $s \approx 0$ のとき

$$(1+r)^{\alpha}(1+s)^{\beta} \approx \boxed{}.$$

($\frac{\partial}{\partial x} x^{\alpha} y^{\beta}\big|_{(x,y)=(1,1)} = \alpha$, $\frac{\partial}{\partial y} x^{\alpha} y^{\beta}\big|_{(x,y)=(1,1)} = \beta$ より．)

したがって，たとえば，名目 GDP 成長率 g，インフレ率 i が十分小さいとき，

$$\text{実質 GDP 成長率} = \frac{1+g}{1+i} - 1 = (1+g)(1+i)^{-1} - 1$$
$$\approx \boxed{} - 1$$
$$= g - i$$

と 1 次近似できる.

微分の意味をもう一度確認！

$$\boxed{\text{微分} = 1 \text{ 次式で近似} = 2 \text{ 次以降の項は無視}}$$

上の $\frac{1+g}{1+i} \approx 1 + g - i$ を基本に返って導いてみると：
$i \approx 0$ のとき

$$\frac{1}{1+i} \approx 1 - i \tag{$*$}$$

なので，$g \approx 0$, $i \approx 0$ のとき

$$\begin{aligned}(1+g)\frac{1}{1+i} \approx (1+g)(1-i) &= 1 + g - i - gi \\ &\approx 1 + g - i \qquad \cdots gi \text{ は小さいから無視！}\end{aligned}$$

となる.

ところで $(*)$ はどうやって出てきた？

$\frac{1}{1+i} \approx 1 - i$ の導き方：

(1) $f(x) = x^{-1}$ とおくと $f'(x) = -x^{-2}$ なので，$i \approx 0$ のとき

$$f(1+i) \approx f(1) + f'(1)i = 1 + (-1) \times i.$$

(2) 等比数列の無限和の公式より，$i \approx 0$ のとき

$$\frac{1}{1+i} = 1 + (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + \cdots$$
$$\approx 1 + (-i). \qquad \cdots (-i)^2 \text{ 以降は小さいから無視！}$$

(3) $i \approx 0$ のとき

$$(1+i)(1-i) = 1 - i^2 \approx 1 \qquad \cdots i^2 \text{ は小さいから無視！}$$

より

$$1 - i \approx \frac{1}{1+i}.$$

合成関数の微分公式 (チェイン・ルール)

関数 $f(x, y)$, $g_1(t), g_2(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), g_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t)) g_2'(t).$$

→『経出る』pp.209-210

予算制約下の効用最大化

$$\max_{x_1, x_2} \quad u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

ベクトルを使って書くと：

$$\max_{\boldsymbol{x}} \quad u(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = I$$

$\boldsymbol{x}$: 消費ベクトル
$\boldsymbol{p}$: 価格ベクトル (所与)
I: 所得 (所与)

接線条件：最適解 $\boldsymbol{x}^*$ で無差別曲線と予算線が接する.
これを数式で表現したい.

最適化の 1 階条件

無差別曲線 $u(\boldsymbol{x}) = \bar{u}$

$=$「曲面 $z = u(\boldsymbol{x})$」と「平面 $z = \bar{u}$」の交わり

$\Downarrow$

無差別曲線 $u(\boldsymbol{x}) = \bar{u}$ を ∞ 倍に拡大したもの

$=$「曲面 $z = u(\boldsymbol{x})$ を ∞ 倍に拡大したもの」と「平面 $z = \bar{u}$」の交わり

$=$「$dz = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\, dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\, dx_2$」と「$dz = 0$」の交わり

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

この直線の法線ベクトル $= \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{pmatrix}$

したがって,

「$\boldsymbol{x}^*$ で無差別曲線と予算線 $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ が接する」

$\Longleftrightarrow$ 「無差別曲線の $\boldsymbol{x}^*$ における法線ベクトルと予算線の法線ベクトルが平行」

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \qquad \\ \\ \end{pmatrix} \text{ となる実数 } \lambda \neq 0 \text{ が存在する}$$

両辺それぞれの成分の比をとると次を得る. $\rightarrow$

効用最大化の 1 階条件

最適消費ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ は

$$\underbrace{MRS_{12}(\boldsymbol{x}^*)}_{\text{限界代替率}} = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\text{価格比}} \tag{$*$}$$

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^* = I \tag{$**$}$$

を満たす.

ただし,

$$MRS_{12}(\boldsymbol{x}^*) =$$

Lagrange の未定乗数法

(1 階条件 $(*)$, $(**)$ を自動的に出す方法)

Step 1 「ラグランジュ関数」というものを設定する：

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2). \tag{1}$$

λ を「ラグランジュ乗数」という.

Step 2 $\mathcal{L}$ を各変数 x_1, x_2, λ で偏微分して「イコールゼロ」とおく：

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 \tag{3}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2. \tag{4}$$

Step 3 **Step 2** で出てきた式を連立して解く.

練習

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \quad u(x_1,\ldots,x_n) = \alpha_1 \log x_1 + \cdots + \alpha_n \log x_n$$
$$\text{s.t.} \quad p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = I$$

(1) Lagrange 法を用いて最適解 $(x_1^*(p_1,\ldots,p_n,I),\ldots,x_n^*(p_1,\ldots,p_n,I))$ およびそのときの Lagrange 乗数 $\lambda^*(p_1,\ldots,p_n,I)$ を求めよ.

(2) 間接効用関数 $V(p_1,\ldots,p_n,I)$ を求めよ.

(3) $\dfrac{\partial V}{\partial I}$ を計算せよ.