

経済学のための数学

「経済学がおもしろい：理系もわかる経済学」

尾山 大輔

www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp/komabaOmni13

2013 年 6 月 6 日

経済学における数学

- ▶ 数学は言語 .
(あくまでも道具 . 道具に振り回されては本末転倒 .)
- ▶ 学部レベルでは , 高校数学を きちんと 理解していればほぼ問題ない .
(高校数学を馬鹿にして背伸びばかりしようとする足すくわれる .)
- ▶ いずれにせよ , 数学が得意ならば (少なくとも苦手でないならば) だいぶん得 .
(理系の人にとって経済学は参入しやすい .)

今回のメニュー

- ▶ 経済学で出る数学のリスト .
- ▶ 期待効用理論を題材として ,
経済学における公理的アプローチについて講義 .

文献の紹介

たくさんあるがほんの一部だけ紹介．

- ▶ 神谷和也・浦井憲『経済学のための数学入門』東京大学出版会，1996 年．
- ▶ 伊藤幹夫・戸瀬信之『経済学とファイナンスのための基礎数学』共立出版，2008 年．
- ▶ 尾山大輔・安田洋祐 編著
『改訂版 経済学で出る数学—高校数学からきちんと攻める』日本評論社，2013 年．
- ▶ 『経済セミナー』2011 年 10・11 月号「徹底マスター！ 最適化」特集．

(入門レベルから大学院レベルまでの経済数学の紹介)

- ▶ 『経済セミナー』2012 年 6・7 月号「基礎から始める！ ファイナンス理論」特集．
- ▶ 『経済セミナー』2012 年 10・11 月号「しっかり入門・計量経済学」特集．

(回帰分析ほか)

<http://www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp/komaba0mni13/>

経済学で出る数学—高校数学からきちんと攻める“経出る”

1. 1 次関数と市場メカニズム
2. 2 次関数と独占・寡占市場
3. 指数・対数と金利
4. 数列と貯蓄
5. 1 変数の微分と利潤最大化
6. ベクトルと予算制約
7. 多変数の微分と効用最大化
8. 行列と回帰分析
9. 確率とリスク
10. 積分とオークション
11. 漸化式と経済成長

経済学で出る数学—高校数学からきちんと攻める“経出る”



2013年3月発売 (税込 2,205 円)

もう少し上級の数学

- ▶ 微分方程式の安定性 (神谷・浦井)
- ▶ 包絡線定理 (神谷・浦井, 伊藤・戸瀬)
- ▶ 分離定理 (伊藤・戸瀬)
- ▶ 動的計画法 (Dynamic Programming)
 - + 最適制御 (Optimal Control)
- ▶ 不動点定理

- ▶ 経済数学事始め / 丹野忠晋
- ▶ 制約付き最大化問題を解く / 図斎 大
- ▶ 経済学で出る包絡線定理 / 尾山大輔・安田洋祐
- ▶ 経済学と不動点定理 / 浦井 憲
- ▶ 分離超平面定理とその応用 / 原 千秋
- ▶ マクロ経済学における動的最適化 / 上東貴志

「数学方言」—数学ならではの用語の使い方

- ▶ 細井勉『はじめて学ぶイプシロン・デルタ』日本評論社，2010 年．
- ▶ 佐藤文広『これだけは知っておきたい数学ビギナーズマニュアル』日本評論社，1994 年．

意思決定理論

- ▶ J. von Neumann and O. Morgenstern,
Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 1944.
(翻訳：ちくま学芸文庫 3 分冊)
- ▶ 林貴志『ミクロ経済学』第 8 章，ミネルヴァ書房，2007 年．(品切れ)
- ▶ I. ギルボア『意思決定理論入門』NTT 出版，2012 年．
- ▶ I. ギルボア『合理的選択』みすず書房，2013 年．
- ▶ I. ギルボア・D. シュマイドラー『決め方の科学—事例ベース意思決定理論』勁草書房，2005 年．
- ▶ 『経出る』第 9 章．

これからやること

- ▶ 経済学でどのように数学が使われているか具体的に見る .
- ▶ 「不確実性下の意思決定をどのようにモデル化・分析するか」を例に .
- ▶ ここで出てくる数学はまったく難しくない .

論理の流れをつかむのが重要 .

(長いので忍耐力もちょっと必要 ..)

- ▶ 経済学の数理的アプローチの典型 :
 - ▶ 「選好」—原理上, 観察可能なもの—から出発
 - ▶ 「効用関数」—数学的に扱いやすいもの—を導出
 - ▶ (効用関数の性質—すなわち選好の性質—から意思決定者の行動の性質を分析)
... 今日はここまではやらない

経済学における「効用関数」

- ▶ 「各選択肢に対して，人は頭の中で『効用』という数値を割り当てている」と**仮定しているわけではない！**

- ▶ 出発点は「選好」.

「各選択肢に対して，人はそれぞれ好き嫌いをもっている」と仮定．

… 原理上，観察可能．

- ▶ 効用関数とは，単に選好を数字の大小で置きかえただけのもの．

大小関係だけが意味をもつ．(数字じたいに意味はない！)

- ▶ 「選好」を表す記号：

$A \succsim B$ … (注目している個人が) B よりも A を好む or 同程度に好き．

- ▶ 関数 U が選好 $\succsim$ を表現するとは，すべての選択肢 A, B に対して

$$A \succsim B \iff U(A) \geq U(B)$$

が成り立つことをいう．

不確実性下の意思決定—フォンノイマン・モルゲンシュテルンの理論

人生における選択はすべてクジ引きである！

▶ $C = \{x_1, \dots, x_N\}$: 結果の集合

▶ $\Delta = \{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N \mid p_1, \dots, p_N \geq 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1\}$:
 C 上の確率分布全体からなる集合 … 選択肢 (クジ) の集合

$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \Delta$: “ x_1 が起こる確率は p_1 , $\dots$, x_N が起こる確率は p_N ”

▶ $[x_i] \in \Delta$: 確率 1 で $x_i \in C$ が起こるというクジ

▶ クジの混合:

$$\alpha \mathbf{p} + (1 - \alpha) \mathbf{q} = (\alpha p_1 + (1 - \alpha) q_1, \dots, \alpha p_N + (1 - \alpha) q_N) \in \Delta$$

例

▶ $C = \{0, 1, \dots, 10\}$

▶ $\mathbf{p}$: 「確率 0.2 で 0 万円, 確率 0.3 で 4 万円, 確率 0.5 で 10 万円もらえる」
というクジ

▶ $\mathbf{p} = (0.2, 0, 0, 0, 0.3, 0, 0, 0, 0, 0.5)$

▶ より見やすい書き方: $\mathbf{p} = 0.2[0] + 0.3[4] + 0.5[10]$

不確実性下の意思決定—フォンノイマン・モルゲンシュテルンの理論

- ▶ $\succsim$: Δ 上の選好関係
 - ▶ $p \succsim q \cdots p$ を q より好む or 同程度に好き
 - ▶ $p \sim q \stackrel{\text{def}}{\iff} p \succsim q \text{ and } q \succsim p \cdots$ 同程度に好き
 - ▶ $p \succ q \stackrel{\text{def}}{\iff} p \succsim q \text{ and } q \not\succsim p \cdots p$ を q より (厳密に) 好む
- ▶ 「すべての $p, q \in \Delta$ に対して $p \sim q$ 」ということはない, と仮定.
- ▶ $\succsim$ にいくつかの仮定 (公理) を課す.
- ▶ それらの公理のもとで, $\succsim$ がある性質をもった効用関数で表現されることを示す.

公理系 (1/2)

1. 完備性 すべての $p, q \in \Delta$ に対して

$$p \succsim q \text{ または } q \succsim p$$

が成り立つ .

2. 推移性 すべての $p, q, r \in \Delta$ に対して

$$p \succsim q, q \succsim r \implies p \succsim r$$

が成り立つ .

3. 連続性 すべての $p, q, r \in \Delta$ に対して

$$p \succsim r \succsim q \implies \exists \alpha \in [0, 1] : r \sim \alpha p + (1 - \alpha)q$$

が成り立つ .

公理系 (2/2)

4. 独立性 すべての $p, q, r \in \Delta$, $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$p \succ q \implies \alpha p + (1 - \alpha)r \succ \alpha q + (1 - \alpha)r \quad (\text{Ind-1})$$

$$p \sim q \implies \alpha p + (1 - \alpha)r \sim \alpha q + (1 - \alpha)r \quad (\text{Ind-2})$$

が成り立つ .

- ▶ フォンノイマン・モルゲンシュテルンの理論の肝 .
- ▶ p, q に関係ない r を混合しても p, q の間の選好は変化しない ,
という要請 .

期待効用定理

定理

Δ 上の選好 $\succsim$ が公理 1-4 を満たすならば,
ある関数 $u: C \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N p_i u(x_i) \quad (*)$$

で定義される関数 $U: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ は選好 $\succsim$ を表現する.

逆に, U で表現される選好 $\succsim$ は公理 1-4 を満たす.

- ▶ (*) で定義される関数 U は $\succsim$ を表現する効用関数のひとつ.
たとえば U^2 も同じ選好を表現する.
- ▶ 関数 u を「フォンノイマン・モルゲンシュテルン関数 (vNM 関数)」という.
 u は正アフィン変換 ($\alpha u + \beta$ の形の変換, $\alpha > 0$) をのぞいて一意である.

証明の方針

($\succsim$ に鑑みて) 最善のクジを $\bar{p}$, 最悪のクジを $\underline{p}$ とする.

(C の有限性と独立性の公理からそのようなものは存在する.
また仮定より $\bar{p} \succ \underline{p}$ である ($\bar{p} \sim \underline{p}$ ではない).)

- ▶ 連続性の公理より各クジ p に対して

$$p \sim \alpha \bar{p} + (1 - \alpha) \underline{p}$$

なる $\alpha \in [0, 1]$ が存在するので (独立性から一意になることを確かめる),
その α の値を $U(p)$ に割り当てることで関数 U を定義する.

- ▶ U が $\succsim$ を表現することを確認する.
- ▶ U が線形になることを確かめる.
- ▶ 各 $x_i \in C$ に対して $u(x_i) = U([x_i])$ とすることで u を定義する.

期待効用定理の証明

Step 1

すべての $p, q \in \Delta$, $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$p \succ q \implies p \succ \alpha p + (1 - \alpha)q \succ q \quad (\text{Bet})$$

が成り立つ (Betweenness) .

証明：独立性の公理の (Ind-1) を 2 回使う .

▶ $p \succ q$ ならば

$$(1 - \alpha)p + \alpha p \succ (1 - \alpha)q + \alpha p$$

$$\alpha p + (1 - \alpha)q \succ \alpha q + (1 - \alpha)q$$

が成り立つ .

期待効用定理の証明

Step 2

すべての $p, q \in \Delta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して
 $p \succ q$ ならば

$$\alpha p + (1 - \alpha)q \succsim \beta p + (1 - \beta)q \iff \alpha \geq \beta \quad (\text{Mon})$$

が成り立つ (Monotonicity) .

証明 : Step 1 の (Bet) を使う .

▶ $\Leftarrow$ の証明 :

$\alpha = \beta$ ならば $\alpha p + (1 - \alpha)q \sim \beta p + (1 - \beta)q$ (完備性より) .

$\alpha > \beta$ とする . Step 1 の (Bet) より $\alpha p + (1 - \alpha)q \succ q$.

ここで $\frac{\beta}{\alpha} \in (0, 1)$ なので , 再び (Bet) より

$$\alpha p + (1 - \alpha)q \succ \frac{\beta}{\alpha} \{ \alpha p + (1 - \alpha)q \} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) q = \beta p + (1 - \beta)q$$

となる .

▶ $\Rightarrow$ の証明 : 対偶を示す . (完備性 + (Bet))

期待効用定理の証明

Step 3

すべての $p \in \Delta$ に対して

$$\exists! \alpha \in [0, 1] : p \sim \alpha \bar{p} + (1 - \alpha) \underline{p} \quad (\text{Uni})$$

が成り立つ (Uniqueness) . この α を α_p と表すことにする .

($\exists!$... “一意に存在する”)

証明 : 連続性の公理と Step 2 の (Mon) を使う .

- ▶ 連続性の公理より

$$p \sim \alpha \bar{p} + (1 - \alpha) \underline{p}$$

をみたす $\alpha \in [0, 1]$ が存在する .

- ▶ 推移性と Step 2 の (Mon) より

$$p \sim \alpha \bar{p} + (1 - \alpha) \underline{p}, \quad p \sim \beta \bar{p} + (1 - \beta) \underline{p}$$

ならば $\alpha = \beta$.

期待効用定理の証明

Step 4

関数 $U: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$U(p) = \alpha_p$$

で定義する .

この U は $\succsim$ を表現する .

証明 : Step 2 の (Mon) を使う .

▶ すべての $p, q \in \Delta$ に対して

$$\begin{aligned} p \succsim q &\iff \alpha_p \bar{p} + (1 - \alpha_p) \underline{p} \succsim \alpha_q \bar{p} + (1 - \alpha_q) \underline{p} \quad ((\text{Uni}) \text{ と推移性より}) \\ &\iff \alpha_p \geq \alpha_q \quad ((\text{Mon}) \text{ より}) \\ &\iff U(p) \geq U(q) \end{aligned}$$

が成り立つ .

期待効用定理の証明

Step 5

すべての $p, q \in \Delta$, $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$U(\alpha p + (1 - \alpha)q) = \alpha U(p) + (1 - \alpha)U(q) \quad (\text{Lin})$$

が成り立つ (Linearity) .

証明：独立性の公理の (Ind-2) を使う .

- ▶ U の定義より

$$p \sim U(p)\bar{p} + (1 - U(p))\underline{p}, \quad q \sim U(q)\bar{p} + (1 - U(q))\underline{p}$$

である .

- ▶ したがって、独立性の公理の (Ind-2) と推移性より

$$\begin{aligned} & \alpha p + (1 - \alpha)q \\ & \sim \alpha \{U(p)\bar{p} + (1 - U(p))\underline{p}\} + (1 - \alpha) \{U(q)\bar{p} + (1 - U(q))\underline{p}\} \\ & = \{\alpha U(p) + (1 - \alpha)U(q)\}\bar{p} + [1 - \{\alpha U(p) + (1 - \alpha)U(q)\}]\underline{p} \end{aligned}$$

が成り立つ .

- ▶ よって、 U の定義より (Lin) が成り立つ .

期待効用定理の証明

Step 6

ある関数 $u: C \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, すべての $p \in \Delta$ に対して

$$U(p) = \sum_{i=1}^N p_i u(x_i) \quad (*)$$

と書ける.

証明: Step 5 の (Lin) を使う.

- ▶ 各 $x_i \in C$ に対して $u(x_i) = U([x_i])$ と定義する.
- ▶ 各 $p \in \Delta$ は $p = \sum_{i=1}^N p_i [x_i]$ と書けるので, Step 5 の (Lin) より

$$U(p) = U\left(\sum_{i=1}^N p_i [x_i]\right) = \sum_{i=1}^N p_i U([x_i]) = \sum_{i=1}^N p_i u(x_i)$$

が成り立つ.

証明終了!

コメント

- ▶ ここで (証明を簡略化するために) 採用した連続性・独立性の公理のペアは通常課されるものより強い .
- ▶ そもそも , 独立性の公理はきつい要請 .
(独立性の公理が満たされない実験結果はたくさん知られている .)

独立性の公理が表現関数の線形性の源泉 .

- ▶ 意思決定者の行動の傾向はすべて vNM 関数 u に埋め込まれている .

→ たとえば『経出る』第 9 章

数学を通じて経済学と仲良くなりましょう

[改訂版]

尾山大輔+安田洋祐
—編著—
OYAMA Daisuke+YASUDA Yosuke
日本評論社
Nippon Hyoron Sha Co., Ltd.

高校数学からきちんと攻める

経済学で出る 数学

第1章 1次関数と市場メカニズム
第2章 2次関数と独占・寡占市場
第3章 指数・対数と金利
第4章 数列と貯蓄
第5章 1変数の微分と利潤最大化
第6章 ベクトルと予算制約
第7章 多変数の微分と福利最大化
第8章 行列と競争分析
第9章 確率とリスク
第10章 積分とオークション
第11章 漸化式と経済成長

出た!
経済数学の決定版
よりわかりやすく よりきちんと攻める